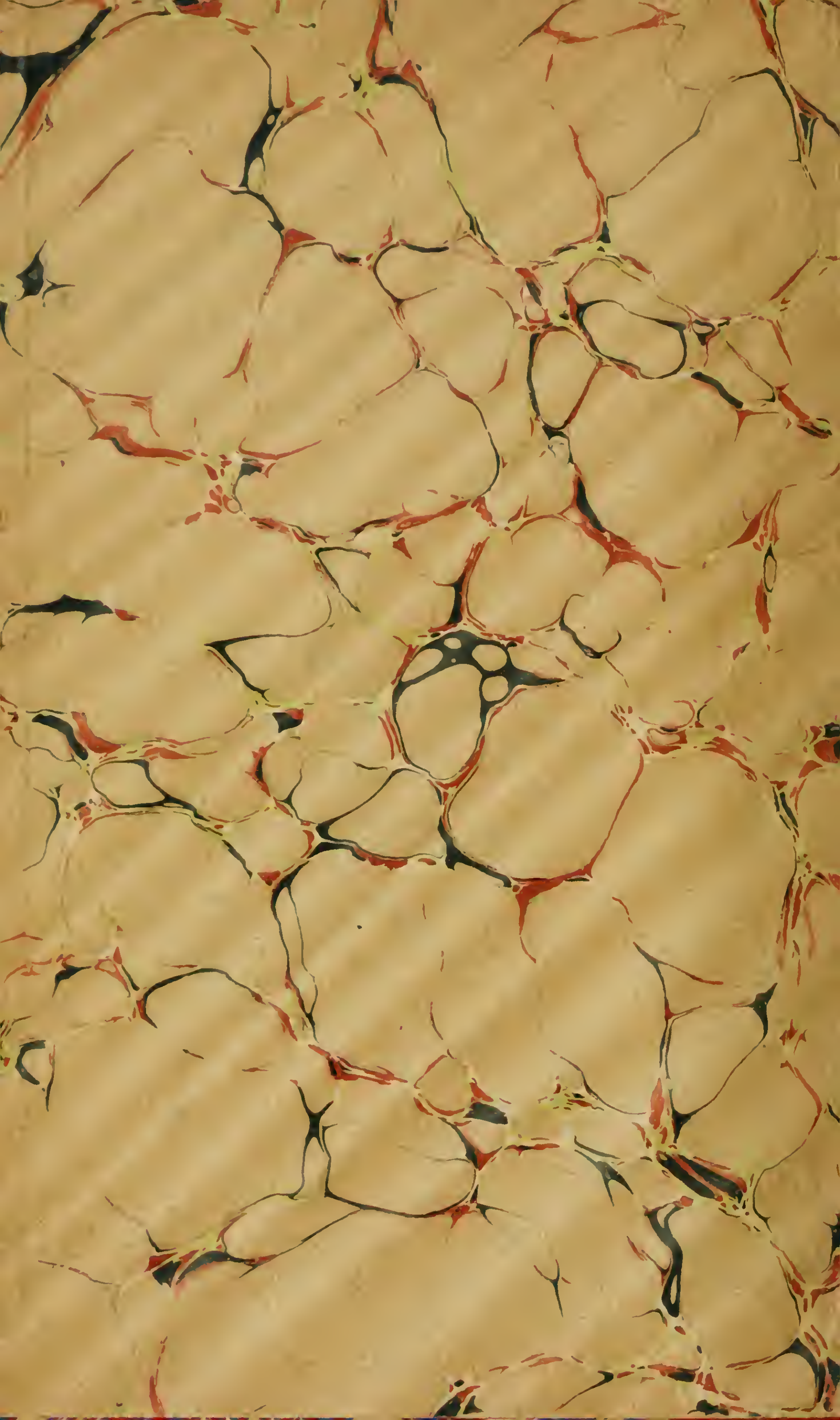
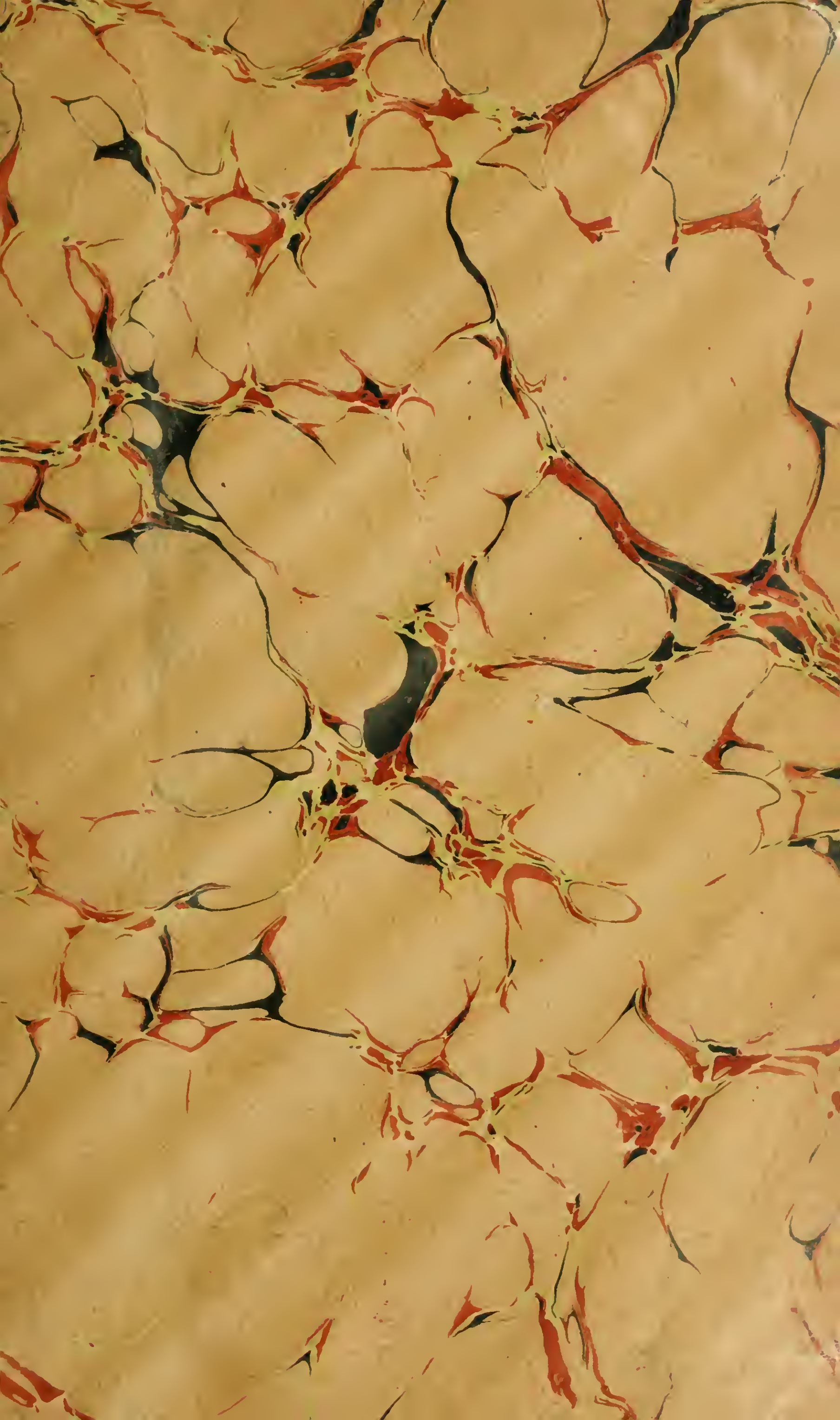

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01219471 8





TRAITÉ
D'ANALYSE.

8548 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

TRAITÉ

D'ANALYSE

PAR

H. LAURENT,

EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

> Le calcul de Leibniz l'a mené dans des païs jusqu'ici inconnus ; et il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles mathématiciens de l'Europe.
>
> DE L'HOSPITAL, *Calcul des infiniment petits.*

TOME I.

CALCUL DIFFÉRENTIEL,

APPLICATIONS ANALYTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1885

A M. MOUTARD,

MON BEAU-PÈRE.

Hommage de reconnaissance et d'affection,

H. LAURENT.

PRÉFACE.

Le Traité d'Analyse que je publie aujourd'hui est destiné aux personnes qui, n'ayant pas le moyen de consulter un grand nombre d'Ouvrages, ont le désir d'acquérir des connaissances étendues en Mathématiques. Il contient, outre le développement des matières exigées des candidats à la licence, le résumé des principaux résultats acquis à la Science.

Je n'ai pas la prétention de croire que la lecture d'un ouvrage unique puisse remplacer l'étude laborieuse des Mémoires des grands maîtres de la Science; mais enfin il est souvent difficile de se procurer ces Mémoires, et je pense que l'on ne m'en voudra pas, si j'ai essayé de faire connaître une partie des trésors qu'ils renferment.

Le Ier Volume contient une théorie élémentaire des séries, le Calcul différentiel et ses applications analytiques.

Les principes de ce calcul y sont exposés, je crois, avec toute la rigueur qu'on est en droit d'exiger. Je suis parvenu à ce résultat en prenant pour base du Calcul différentiel le fameux théorème de Rolle, tel qu'il a été énoncé par M. O. Bonnet et la formule de Taylor qui en découle immédiatement.

Les applications sont relatives à la théorie des formes, à l'élimination et à la recherche des maxima. Bien que la théorie des formes ne soit pas exigée des candidats à la li-

cence, elle pourra être lue avec fruit par eux et être considérée comme un bon exercice sur le changement de variables.

J'ai donné sur l'élimination des développements qui trouveront leur application plus tard, et je me suis permis d'exposer mes propres recherches sur ce sujet, parce qu'elles jettent, je crois, un jour nouveau sur cette théorie restée un peu obscure jusqu'ici, et qu'elles ont d'ailleurs été entreprises précisément en vue de cet Ouvrage.

Le IIe Volume contiendra des applications géométriques des théories exposées dans le premier, à savoir la théorie des tangentes et des plans tangents, des enveloppes, de la courbure, et du contact en général. La théorie des lignes tracées sur les surfaces est renvoyée au Calcul intégral, où elle sera traitée plus à fond que dans la plupart des autres Traités d'Analyse. Les derniers Chapitres de ce Volume sont consacrés à une théorie sommaire des points singuliers et des asymptotes : l'étude plus approfondie de cette question sera faite après les théories de Cauchy sur les fonctions des variables imaginaires, en prenant pour guide les travaux récents de MM. Halphen, Nöther, etc.

Le IIIe Volume traite du calcul des intégrales indéfinies et définies, des intégrales des différentielles à plusieurs variables et des intégrales multiples.

On voudra bien remarquer combien je me suis efforcé d'être rigoureux dans cette partie du Calcul intégral, avec quelle circonspection j'ai fait usage des règles de la différentiation sous le signe $\int$ et des lois de la continuité.

Les applications analytiques sont relatives à la théorie générale des fonctions et de leurs développements en séries ; elles résument une des plus belles parties de l'œuvre de Cauchy et de ses disciples. J'ai essayé de restituer à cet illustre géomètre une part que l'on a essayé de lui ravir dans ces derniers temps. En particulier, j'ai exposé une méthode qui

lui est due pour le développement des fonctions en séries trigonométriques, fondée sur le calcul des résidus, qui est tout aussi rigoureuse que celle de Dirichlet et qui entre bien plus profondément au cœur de la question.

Un Chapitre est consacré à l'interpolation des fonctions numériques; on y trouve une théorie très développée des fonctions eulériennes, le calcul des dérivées à indices quelconques et les éléments du calcul inverse des intégrales définies, le développement en fractions continues et la théorie des fonctions de Legendre, qui sera d'ailleurs reprise à un autre point de vue dans le Volume suivant.

Le Volume se termine par l'étude des fonctions algébriques ou, si l'on veut, des courbes algébriques; on y trouvera la théorie des points singuliers, dont j'ai parlé plus haut, et celle de la transformation des courbes planes.

Le IVe Volume est consacré aux équations différentielles ordinaires, il contient deux démonstrations rigoureuses de ce principe : que tout système d'équations différentielles ordinaires admet une intégrale. La discussion approfondie de ces démonstrations conduit, d'après Cauchy, à une théorie complète des solutions singulières. Avant de parler des méthodes connues d'intégration, j'ai pensé qu'il serait bon d'exposer la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes, qui interviennent de plus en plus dans la théorie des équations différentielles. La théorie des fonctions elliptiques est exposée d'après les méthodes de Cauchy, celle des fonctions abéliennes en suivant de très près le fameux Mémoire de Riemann et en faisant usage de son plan multiple, sans toutefois faire intervenir le principe de Dirichlet. Parmi les applications de la théorie des fonctions elliptiques, on voudra bien remarquer une exposition assez simple des propriétés des cubiques planes et des biquadratiques gauches; enfin une belle démonstration du théorème de Poncelet sur les polygones inscrits et circon-

scrits aux coniques due à M. Hermite. Le Volume se termine par la recherche des maxima des intégrales simples.

Le Ve Volume renferme la théorie des équations aux dérivées partielles, la théorie des lignes tracées sur les surfaces et des coordonnées curvilignes, la théorie des complexes, enfin quelques mots sur la variation des intégrales multiples. La théorie des équations du premier ordre et des équations aux différentielles totales y est exposée en détail et avec rigueur; mais la théorie des équations à plusieurs inconnues et des ordres supérieurs, sur laquelle on ne connaît que fort peu de chose, laisse à désirer sous ce point de vue; ainsi j'ai souvent différentié, sous le signe $\int$, des expressions qu'il n'était pas permis de traiter de cette façon; j'ai aussi admis, comme un postulatum, le principe de Dirichlet. Il m'a semblé que les démonstrations que l'on a essayé de donner de ce principe étaient trop compliquées et pas tout à fait rigoureuses. Les applications géométriques roulent sur la théorie des lignes de courbure, des lignes asymptotiques, des lignes géodésiques et, en général, des lignes que l'on peut tracer sur une surface. La théorie des coordonnées curvilignes et des surfaces orthogonales y est exposée avec détail ainsi que la théorie des complexes.

Le VIe et dernier Volume contient quelques théories détachées qui trouveraient difficilement leur place dans le corps même de l'Ouvrage et dont il serait trop long de faire l'énumération.

A la fin de presque tous les Chapitres, j'ai eu soin de placer des exercices ou des notes, pour la plupart du temps extraites des œuvres des maîtres de la Science et destinés à éclairer ou à compléter les matières exposées dans le texte.

Dans cet Ouvrage, on trouvera peu de figures, peu de développements relatifs à la Géométrie pure; c'est avant tout un Traité d'Analyse et, si l'on y rencontre de la Géométrie, c'est

qu'elle vient compléter et élucider l'Analyse. D'ailleurs la Géométrie a des méthodes qui lui sont propres, et elle doit être étudiée dans des Traités spéciaux. On comprendra donc pourquoi je me suis si peu étendu sur l'homographie et sur les autres méthodes de transformation des figures; le développement de ces belles théories doit surtout faire l'objet des Traités de Géométrie pure.

Enfin, pour faire comprendre dans quel esprit est écrit ce Traité d'Analyse, qu'il suffise de dire que l'auteur est un ardent disciple de Cauchy, de ce géomètre incomparable dont Abel disait qu'il avait puisé toutes ses connaissances dans ses écrits. « Un tel aveu, dit O. Terquem, est le meilleur des panégyriques. »

Je dois remercier, en terminant, mon excellent ami M. E. Lucas, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, qui a bien voulu me prêter son précieux et bienveillant concours pour la correction des épreuves.

TRAITÉ D'ANALYSE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

APPLICATIONS ANALYTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

I. — Des fonctions.

Autrefois on appelait *fonctions d'une quantité* les diverses puissances de cette quantité, puis on a étendu le mot de *fonction* à toutes les expressions analytiques que l'on peut former avec cette quantité ; voici la définition plus précise qui semble adoptée aujourd'hui et que nous adopterons dans ce qui va suivre :

Deux quantités sont fonctions l'une de l'autre quand, l'une d'elles restant constante, l'autre reste constante aussi.

Cette définition comprend celle de la constante : c'est là un inconvénient de peu d'importance, car il sera toujours facile

de préciser dans chaque cas particulier; il est, d'ailleurs, le plus souvent utile de considérer le cas où la fonction devient une constante.

Une quantité f sera dite *fonction de plusieurs autres* $x, y, z, \ldots$ quand, celles-ci restant constantes, f restera constante aussi; on voit donc que, si f est fonction de $x, y, z, \ldots$, elle sera fonction de chacune de ces variables en particulier, prise isolément, les autres restant constantes.

De là résulte que notre définition du mot *fonction* comprend celle des fonctions *analytiques* que l'on considérait autrefois et celle de toutes les autres fonctions, telles que les fonctions empiriques dont la forme n'est donnée que par des phénomènes naturels.

§ II. — Continuité des fonctions.

Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est continue pour $x = a$ quand, étant donnée une quantité positive quelconque ε, aussi petite que l'on voudra du reste, il existera une quantité positive H telle que, h étant moindre en valeur absolue que H, $f(a+h)$ ait une valeur unique et bien déterminée, et que l'on ait

$$\text{val. abs.}\,[f(a+h) - f(a)] < \varepsilon,$$

quelle que soit d'ailleurs la valeur attribuée à h.

Une fonction, $\sqrt{x}$ par exemple, peut avoir pour chaque valeur de x plusieurs valeurs et cependant être continue, s'il est possible de séparer ces valeurs de telle sorte que l'accroissement h donné à x entraîne toujours sans ambiguïté un accroissement, et un seul, bien déterminé pour la fonction.

Théorème I. — *Si une fonction $f(x)$ est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, si de plus $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, il existera une valeur α de x, comprise entre a et b, telle que l'on ait $f(\alpha) = 0$.*

Pour le démontrer, désignons par n un nombre entier quel-

conque plus grand que 1, posons $\frac{b-a}{n} = h$ et formons la suite

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h),\ \ldots,\ f(a+\overline{n-1}\,h),\ f(b).$$

Si l'un des termes de cette suite était nul, le théorème serait démontré; si aucun d'eux n'est nul, il en existera deux consécutifs au moins qui seront de signes contraires, puisque le premier et le dernier sont de signes contraires; appelons ces termes $f(a_1)$ et $f(b_1)$, posons $\frac{b_1-a_1}{n} = h_1$ et considérons la nouvelle suite

$$f(a_1),\ f(a_1+h_1),\ \ldots,\ f(a_1+\overline{n-1}\,h_1),\ f(b_1);$$

si aucun des termes de cette suite n'est nul, auquel cas le théorème serait démontré, il existera deux termes consécutifs $f(a_2)$ et $f(b_2)$ de signes contraires; posant $\frac{b_2-a_2}{n} = h_2$, on considérera la nouvelle suite

$$f(a_2),\ f(a_2+h_2),\ \ldots,\ f(a_2+\overline{n-1}\,h_2),\ f(b_2),\ \ldots.$$

En continuant ainsi, on formera deux séries de nombres $a, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ et $b, b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$, les premiers croissants, les seconds décroissants, ou plutôt tels que

$$a \leq a_1 \leq a_2 \ \ldots \quad b \geq b_1 \geq b_2 \ \ldots$$

En général, $f(a_m)$ et $f(b_m)$ sont de signes contraires et

(1) $$b_m - a_m = \frac{b-a}{n^m};$$

or les nombres a_m vont en croissant sans dépasser b : ils ont donc une limite α. Les nombres b_m ont de même une limite β : or, en vertu de (1), $b_m - a_m$ tend vers zéro quand m augmente indéfiniment : donc

$$\lim b_m - \lim a_m = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \beta.$$

Ceci posé, considérons $f(\alpha)$; a_m et b_m différant de α d'aussi peu que l'on veut, on pourra prendre en valeur absolue

$$f(\alpha) - f(a_m) < \varepsilon, \quad f(\alpha) - f(b_m) < \varepsilon;$$

or, zéro étant compris entre $f(a_m)$ et $f(b_m)$, on aura alors, *a fortiori*,

$$f(\alpha) - 0 < \varepsilon \quad \text{ou} \quad f(\alpha) < \varepsilon.$$

Mais une quantité fixe $f(\alpha)$ qui peut être rendue moindre que ε, quelque petit qu'il soit, est nulle : donc, etc. C. Q. F. D.

On conclut de là cet autre théorème :

THÉORÈME II. — *Une fonction $f(x)$ continue entre les limites a et b ne peut passer de la valeur $f(a)$ à la valeur $f(b)$ sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.*

Supposons en effet $f(a) < \mu < f(b)$; si l'on considère la fonction $f(x) - \mu$, cette fonction sera évidemment continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b. Donc, $f(a) - \mu$ étant négatif, $f(b) - \mu$ positif, $f(x) - \mu$ passera par zéro pour une valeur de x comprise entre a et b, ou $f(x)$ deviendra égal à μ. C. Q. F. D.

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie ; une fonction qui ne saurait passer de la valeur $f(a)$ à la valeur $f(b)$ sans passer par toutes les valeurs intermédiaires n'est pas pour cela continue : $\sin\frac{1}{x}$, par exemple, ne peut passer de -1 à $+1$ sans passer par toutes les valeurs intermédiaires, et cependant cette fonction est discontinue pour $x = 0$; et non pas parce qu'elle est indéterminée pour $x = 0$, car, comme elle n'est pas définie pour cette valeur de x, on peut lui assigner pour $x = 0$ la valeur zéro, et considérer une fonction $f(x)$ égale à $\sin\frac{1}{x}$, excepté pour $x = 0$, et égale à zéro pour $x = 0$. Une pareille fonction $f(x)$ n'est pas continue, parce que $f(h)$, quelque petit que soit h, ne peut pas rester moindre qu'une quantité arbitraire ε. Toutefois on peut dire que :

THÉORÈME III. — *Si une fonction $f(x)$ croissante (ou décroissante) quand x varie de a à b ne peut pas passer de $f(a)$ à $f(b)$ sans passer par toutes les valeurs intermédiaires, elle est continue dans cet intervalle, pourvu qu'elle ait une valeur déterminée pour chaque valeur de x.*

En effet, soit $a < c < b$; je dis que l'on peut choisir H assez petit pour que, h étant moindre en valeur absolue que H, on ait en valeur absolue

$$(1) \qquad f(c+h) - f(c) < \varepsilon,$$

ε étant une quantité donnée quelconque. En effet, si l'on ne pouvait pas satisfaire à cette inégalité pour une certaine valeur donnée de ε, c'est que $f(x)$ ne pourrait pas passer par les valeurs comprises entre $f(c)$ et $f(c)+\varepsilon$, car $f(x)$, étant croissant avec x, ne pourrait pas passer par ces valeurs pour $x < c$ ni pour $x > c$; puisque, $f(c+h)$ étant plus grand que $f(c)+\varepsilon$ ou égal à $f(c)+\varepsilon$, pour des valeurs de x plus grandes que $c+h$, $f(x)$ sera encore plus grand : donc on devra pouvoir satisfaire à (1) et $f(x)$ sera continu.

Ainsi, par exemple, si $\alpha > 0$, x variant de 0 à ∞, x^α croît, et, comme on peut toujours prendre $x^\alpha = \mu$, μ étant positif, on peut en conclure que x^α est continu pour les valeurs positives de x, car x^α a d'ailleurs une valeur déterminée pour chaque valeur de x.

Remarque. — *Si $f(x)$ est continu pour toutes les valeurs de x voisines de c, la limite de $f(c+h)$ quand h tendra vers zéro, ou de $f(x)$ quand x tendra vers c, sera $f(c)$.* En effet, $f(x)$ étant continu pour $x=c$, $f(c+h)-f(c)$ peut être rendu moindre que ε; donc

$$\lim[f(c+h)-f(c)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim f(c+h) = f(c).$$

Ceci permet de démontrer très simplement que la somme ou le produit de plusieurs fonctions continues est continu, que le quotient ou la différence de deux fonctions continues est continu, que si $f(u, v)$ est fonction continue de u et de v, u et v étant fonctions continues de x, f est aussi fonction continue de x.

Démontrons seulement cette dernière proposition, qui résume les autres :

Changeons x en $x+h$, u deviendra $u+\alpha$ et v deviendra

$v+\beta$; α et β tendront vers zéro, d'après notre remarque, pour $h=0$; mais, f étant continu par rapport à u et v, $f(u+\alpha, v+\beta)$ différera très peu de $f(u, v+\beta)$, lequel diffère aussi très peu de $f(u, v)$: donc $f(u+\alpha, v+\beta)$ a pour limite $f(u, v)$ quand α et β tendent vers zéro, c'est-à-dire quand λ tend vers zéro. Cela revient à dire que $f(u, v)$ est continu par rapport à x.

J'ai développé ces démonstrations dans mon *Traité d'Algèbre*, mais je crois devoir les reproduire dans cette Introduction, qui est faite pour combler les lacunes qui existent généralement dans les Traités d'Algèbre, rédigés conformément aux programmes officiels.

III. — Continuité des fonctions imaginaires [1].

Nous appellerons, avec Cauchy, *fonction d'une variable imaginaire* $x+y\sqrt{-1}$ toute expression de la forme

$$X+Y\sqrt{-1},$$

où X et Y sont fonctions de x et y. Plus tard nous restreindrons la généralité de cette définition : nous dirons que la fonction $X+Y\sqrt{-1}$ est continue si X et Y sont des fonctions continues de x et de y. Il en résulte que, si $f(x+y\sqrt{-1})$ est fonction continue de $x+y\sqrt{-1}$, on devra pouvoir prendre H et K assez petits pour que, h et k étant moindres en valeur absolue que H et K, on ait

$$\operatorname{mod}\left[f(x+h+\overline{y+k}\sqrt{-1})-f(x+y\sqrt{-1})\right]<\varepsilon,$$

[1] Je préviens le lecteur que, pour moi, $\sqrt{-1}$ n'est pas *une quantité qui élevée au carré donne* -1, et je ne *conviens* pas de faire usage de ce signe $\sqrt{-1}$ *en vertu de la généralité de l'Algèbre*. Plusieurs théories *très rigoureuses* des imaginaires ont été données par Cauchy. On peut, par exemple, considérer les égalités entre imaginaires comme des *congruences* relatives au module i^2+1. (Voir mon *Algèbre*.)

car cette inégalité revient à

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}\big[&X(x+h, y+k) - X(x, y)\\ &+ \sqrt{-1}\,Y(x+h, y+k) - \sqrt{-1}\,Y(x,y)\big] < \varepsilon;\end{aligned}$$

or, X et Y étant continues, les différences qui sont entre les crochets peuvent être rendues moindres que $\frac{\varepsilon}{2}$: donc le module de leur somme sera moindre que ε. La réciproque est évidente, car le module d'une imaginaire ne peut être très petit que si chacune de ses parties est très petite.

Il est clair aussi que, si une fonction est continue, son argument et son module sont continus, et *vice versa*.

IV. — Sur la représentation géométrique des imaginaires.

Une imaginaire $x+y\sqrt{-1}$ ou $x+yi$ peut être représentée par le point qui, par rapport à deux axes rectangulaires fixes, a pour coordonnées x et y; et *vice versa*, tout point de coordonnées x, y peut servir à représenter géométriquement l'imaginaire $x+y\sqrt{-1}$. Cauchy appelle l'imaginaire

$$x+y\sqrt{-1}$$

l'*affixe* du point (x, y).

Quand nous dirons que le point $x+y\sqrt{-1}$ *décrit* une courbe C, il faudra entendre par là que le point (x, y) qui a pour affixe l'imaginaire $x+y\sqrt{-1}$ décrit cette courbe.

Posons

$$x+y\sqrt{-1} = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

r et θ seront le module et l'argument de $x+y\sqrt{-1}$; ce seront aussi les coordonnées polaires du point (x, y); r et θ pourront comme x et y servir à représenter l'imaginaire $x+y\sqrt{-1}$. Ainsi une imaginaire pourra être représentée par une droite

égale à son module, faisant avec un axe fixe un angle égal à son argument. L'avantage de ce mode de représentation résulte du théorème suivant :

La somme de plusieurs imaginaires est représentée par la résultante des droites qui représentent ces imaginaires.

En effet, soient

$$x + y\sqrt{-1}, \quad x' + y'\sqrt{-1}, \quad x'' + y''\sqrt{-1}, \quad \ldots$$

des imaginaires ;

$$(x + x' + x'' + \ldots) + (y + y' + y'' + \ldots)\sqrt{-1}$$

leur somme ; x, y sont les projections sur les axes de coordonnées de la droite r qui représente $x + y\sqrt{-1}$, ... ; donc $x + x' + x'' + \ldots$ est la somme des projections des droites qui représentent les imaginaires en question sur l'axe des x : c'est la projection de leur résultante sur cet axe ; $y + y' + y'' + \ldots$ serait la projection de la même résultante sur l'axe des y, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. — Le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties.

V. — Notions sur les infiniment petits. — Nouvelle définition de la continuité.

Nous appellerons quantité *infiniment petite* ou *infiniment petit* toute *quantité* VARIABLE ayant pour limite zéro.

Nous appellerons *quantité infinie* toute *quantité* VARIABLE que l'on pourra prendre plus grande que toute *quantité* donnée.

Nous avons souligné à dessein le mot *variable*. Il n'y a pas de quantité fixe *infinie* ou *infiniment* petite ; zéro n'est pas infiniment petit, parce que zéro est fixe.

On fait usage des mots que nous venons de définir pour

abréger le langage et pour simplifier certaines locutions. Par exemple :

1° On dit que $\frac{1}{x}$ est infini pour $x = 0$ ou quand x tend vers zéro : c'est une manière abrégée d'énoncer ce fait, que $\frac{1}{x}$ croît au delà de toute limite et peut être pris plus grand qu'une quantité donnée quelconque quand x s'approche de zéro suffisamment. On dit aussi que $\frac{1}{x}$ est infiniment grand quand x est infiniment petit.

2° On dira que x^2, x^3, ... sont infiniment petits en même temps que x, au lieu de dire que x^2, x^3, ... ont pour limite zéro quand x a lui-même pour limite zéro.

3° Il est absurde de dire que deux droites parallèles se rencontrent à l'infini : deux droites parallèles ne se rencontrent pas du tout. De pareilles locutions échappent parfois, je dirai même sont employées assez volontiers pour abréger le langage ; nous les emploierons le plus tard possible et seulement quand le lecteur sera familiarisé avec la notion infinitésimale. Voici maintenant à quel propos on peut dire que deux parallèles se rencontrent à l'infini.

Je suppose que D soit une droite fixe ; si autour d'un point A pris en dehors de D on fait tourner une droite D' de manière à lui faire faire avec D un angle α de plus en plus petit, le point d'intersection de D et D' s'éloignera indéfiniment du point A ; *sa distance au point A est donc infinie quand l'angle α est infiniment petit.*

On dit alors que les deux droites devenues parallèles se *rencontrent à l'infini.*

En acceptant les définitions que nous venons de donner, on peut dire qu'une *fonction continue* est une fonction qui prend toujours un accroissement infiniment petit quand on donne à sa variable un accroissement infiniment petit *quelconque.*

Cette nouvelle définition a seulement sur celle que nous avons donnée plus haut l'avantage de la concision ; mais il ne faut pas oublier, pour l'exactitude, de dire que l'accroisse-

ment de la variable est un infiniment petit quelconque : ce qui veut dire que l'accroissement de la fonction tend vers zéro, *de quelque manière* que l'on fasse tendre vers zéro l'accroissement correspondant de la variable.

Ces définitions conviennent aux quantités imaginaires comme aux quantités réelles; disons seulement qu'une quantité imaginaire est infinie quand son module est infini et qu'elle est infiniment petite quand son module est infiniment petit.

Rappelons, en terminant cette Introduction, un principe sur lequel nous avons fréquemment l'occasion de nous appuyer.

Lorsqu'une quantité variable croît, sans dépasser une quantité fixe, elle a une limite égale ou inférieure à cette quantité fixe.

Quand une quantité variable décroît, sans devenir inférieure à une quantité fixe, elle a une limite égale ou supérieure à cette quantité fixe.

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SÉRIES.

I. — Définitions.

On appelle *série* une suite illimitée de termes qui se forment et se suivent d'après une loi déterminée. On appelle encore les séries *suites infinies*.

Une série est convergente quand la somme de ses n premiers termes tend vers une limite déterminée, lorsque n augmente indéfiniment, en suivant du reste une loi quelconque : cette limite est ce que l'on appelle la *valeur* de la série ou la *somme de ses termes*.

Une série qui n'est pas convergente est appelée *divergente*. La série

$$(x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + (x_3 - x_4) + \ldots + (x_{n-1} - x_n) + \ldots$$

dans laquelle x_n désigne un nombre qui a pour limite zéro, lorsque n augmente indéfiniment, est convergente, car la somme de ses n premiers termes est $x_0 - x_n$, et cette quantité a pour limite x_0 pour $n = \infty$.

Au contraire, la série

$$+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots - 1 + 1 + \ldots$$

est divergente, car la somme de ses n premiers termes est alternativement zéro et 1 ; elle ne tend par conséquent pas vers une limite déterminée lorsque n croît d'une manière quelconque.

On comprend difficilement comment d'illustres analystes ont pu écrire des formules telles que

$$(A) \qquad +1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$$

(LEIBNITZ, *Lettre à Christian Wolff.* — EULER, *Institutiones Calculi differentialis et integralis*, Pars posterior, Cap. I, etc.).

Une série divergente ne saurait représenter $\frac{1}{2}$. En effet, quelle idée peut-on se faire d'une somme composée d'un nombre illimité de parties? En toute rigueur, on n'a pas même le droit d'écrire

$$(1) \qquad \alpha_0 = (\alpha_0 - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \ldots + (\alpha_n - \alpha_{n+1}) + \ldots$$

lorsque α_n tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque la série est convergente. On le fait cependant, mais seulement en vertu d'une convention qui consiste à séparer une série convergente de la limite vers laquelle tend la somme de ses termes par le signe =. Ainsi la formule (1) est une manière abrégée d'écrire

$$\alpha_0 = \lim[(\alpha_0 - \alpha_1) + \ldots + (\alpha_n - \alpha_{n+1})] \quad \text{pour } n = \infty.$$

La formule (A) est donc absurde, puisque la limite de la somme de ses n premiers termes n'existe pas : cette limite n'est donc pas égale à $\frac{1}{2}$.

§ II. — Théorèmes sur la convergence.

THÉORÈME I. — *Pour qu'une série soit convergente, il faut que ses termes diminuent indéfiniment jusqu'à zéro.*

En effet, soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Soit, en général, s_n la somme des n premiers termes; on a

$$(1) \qquad s_{n+1} - s_n = u_n.$$

Si l'on suppose la série proposée convergente et si l'on désigne sa valeur par s, on aura

$$\lim s_{n+1} = s,$$
$$\lim s_n = s;$$

donc

$$\lim s_{n+1} - \lim s_n = \lim(s_{n+1} - s_n) = 0.$$

Donc, en vertu de (1),

$$\lim u_n = 0.$$

Remarque I. — La démonstration que nous venons d'employer, comme du reste toutes celles que nous emploierons dans l'exposition de ces principes, est basée sur le calcul des limites; elle précise le sens que nous devons attribuer à la locution *diminuer indéfiniment*. Quand nous disons que u_n doit diminuer indéfiniment, nous devons entendre par là que cette quantité, réelle ou imaginaire, doit avoir zéro pour limite, rien de plus : ainsi u_n peut tendre comme on veut vers zéro; il n'est nullement nécessaire, par exemple, que l'on ait

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2} > \ldots.$$

Remarque II. — On aurait également pu écrire les équations suivantes :

$$\lim s_{n+p} = s,$$
$$\lim s_n = s;$$

d'où, retranchant la deuxième de la première,

$$\lim u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p-1} = 0,$$

ce qui conduit à ce résultat :

Pour qu'une série soit convergente, il faut que la somme des p termes qui suivent le $n^{ième}$ ait pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, quel que soit du reste p.

Remarque III. — Il existe des séries dans lesquelles u_n peut tendre vers zéro sans que la série à laquelle appartient ce terme soit convergente; par exemple, considérons la série suivante, appelée série *harmonique* :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots.$$

Il est facile de s'assurer que cette série est divergente, car, si l'on prend n termes après le $n^{\text{ième}}$, la somme

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

est plus grande que $\frac{1}{2n}$ répété n fois, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}$. Si donc on groupe les termes de la série harmonique ainsi qu'il suit :

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\ldots,$$

on voit que la somme de ses $2n$ premiers termes est plus grande que $\frac{1}{2}$ répété autant de fois que l'on veut. En prenant n suffisamment grand, la somme de ces $2n$ premiers termes croît donc au delà de toute limite; donc la série est divergente. C. Q. F. D.

Il arrive souvent que l'on rend une série convergente par un simple changement des signes de quelques-uns de ses termes. Ainsi la série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\pm\frac{1}{n}\mp\frac{1}{n+1}\pm\ldots$$

est convergente. En général :

Théorème II. — *Si dans une série les termes sont, à partir de l'un d'eux, indéfiniment décroissants jusqu'à zéro et alternativement positifs et négatifs, cette série est convergente.*

En effet, considérons la série

$$u_1+u_2+\ldots+u_n-u_{n+1}+u_{n+2}-\ldots+u_{n+p}\mp u_{n+p+1}\pm\ldots,$$

dans laquelle les termes sont indéfiniment décroissants et alternativement positifs et négatifs à partir de u_n.

Appelons, en général, S_m la somme des m premiers termes de la série. Si nous remarquons que les termes vont constamment en diminuant, les quantités

$$u_n-u_{n+1},\quad u_{n+2}-u_{n+3},\quad\ldots,\quad u_{n+2p}-u_{n+2p+1}$$

seront toutes positives, et, par conséquent,

(1) $$S_{n+1} < S_{n+3} < S_{n+5} < \dots < S_{n+2p+1} < \dots;$$

les quantités $-u_{n+1}+u_{n+2}, \dots, -u_{n+2p-1}+u_{n+2p}, \dots$ seront toutes négatives, et, par suite,

(2) $$S_{n+2} > S_{n+4} > S_{n+6} > \dots > S_{n+2p} > \dots.$$

Or

$$S_{n+2p} = S_{n+2p-1} + u_{n+2p}.$$

Donc S_{n+2p} est plus grand que S_{n+2p-1}, et, à cause de la suite d'inégalités (1), plus grand que S_{n+1}. Ainsi donc une somme quelconque comprise dans la suite S_{n+2}, S_{n+4}, S_{n+6} est plus grande que S_{n+1} ; il en résulte que ces sommes, allant constamment en décroissant et restant supérieures à S_{n+1}, qui est fixe, ont une limite S. Or on a

$$S_{n+2p} - u_{n+2p+1} = S_{n+2p+1}.$$

Faisons croître p indéfiniment; le premier membre de cette égalité a pour limite S, car u_{n+2p+1} a pour limite zéro; donc S_{n+2p+1} a pour limite S également; donc, de quelque manière que croisse l'entier m, S_m a une limite, ce qui revient à dire que la série proposée est convergente.

Corollaire. — On voit que, la valeur de la série étant comprise entre S_n et S_{n+1}, l'erreur commise en prenant S pour valeur de la série est moindre en valeur absolue que u_{n+1}.

Théorème III. — *Quand une série à termes positifs a ses termes respectivement plus petits que ceux d'une autre série également à termes positifs, et de plus convergente, la première série est aussi convergente.*

Soient, en effet,

(1) $$s = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

la série convergente donnée (on représente ordinairement une série convergente en séparant la somme d'un certain

nombre de termes de sa valeur par le signe = et en supprimant le mot *lim*) et

$$(2) \qquad v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

l'autre série. Soient s_n la somme des n premiers termes de la série (1), t_n la somme des n premiers de la série (2); comme $v_0 < u_0$, $v_1 < u_1$, ..., $v_n < u_n$, on a évidemment

$$t_n < s_n;$$

donc, *a fortiori*,

$$t_n < s.$$

Or, n croissant, t_n croît, mais t_n reste constamment inférieur à s; donc, en vertu d'un principe énoncé page 10, t_n a une limite; donc la série (2) est convergente. C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Une série à termes positifs et négatifs est convergente lorsque la série des valeurs absolues de ses termes est convergente.*

En effet, considérons à part les séries des termes positifs et des termes négatifs pris dans l'ordre dans lequel ils se succèdent dans la série proposée.

Soient

$$(1) \qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots$$

la série des termes positifs et

$$(2) \qquad b_0 + b_1 + \ldots + b_k + \ldots$$

celle des termes négatifs pris chacun en valeur absolue.

Soient x_i la somme des i premiers termes de la série (1), y_k la somme des k premiers termes de la série (2), et s_n la somme des n premiers termes de la série proposée. Nous pouvons toujours supposer que $a_0, a_1, \ldots, a_i$ soient les termes positifs de s_n, et $b_0, b_1, \ldots, b_k$ les termes négatifs; alors on a, en appelant s'_n la somme des n premiers termes de la série proposée rendus positifs,

$$(3) \qquad s'_n = x_i + y_k,$$

$$(4) \qquad s_n = x_i - y_k.$$

L'équation (3) montre que s'_n est plus grand que x_i et que y_k; donc, *a fortiori*, la limite de s'_n, qui par hypothèse existe, est supérieure à x_i et à y_k. Or x_i et y_k sont des nombres croissant avec i et k, mais constamment inférieurs à la limite de s'_n; donc ils ont une limite chacun, donc les séries (1) et (2) sont convergentes. L'équation (4) montre que s_n a une limite égale à la différence des limites de x_i et y_k, c'est-à-dire que la série proposée est convergente et a une valeur égale à la différence des valeurs des séries de ses termes positifs et de ses termes négatifs.

Théorème V. — *Quand une série ne perd pas sa convergence lorsque l'on rend tous ses termes positifs, on peut, sans altérer sa valeur, intervertir l'ordre de ses termes.*

En effet, considérons d'abord une série convergente à termes positifs :

(1) $$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots.$$

Intervertissons l'ordre de ses termes, et soit

(2) $$v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$

la nouvelle série obtenue après ce changement. Soient s'_n la somme des n premiers termes de la série (2), s_m la somme des m premiers termes de la série proposée; on pourra toujours choisir m de telle sorte que tous les termes de s'_n soient contenus dans les m premiers termes de la série (1). On aura alors

$$s'_n \leq s_m \quad \text{et} \quad s'_n < \lim s_m \text{ ou } < s.$$

Nous voyons par là :

1° Que la série (2) est convergente, puisque s'_n croît avec n sans dépasser s;

2° Que la valeur $s' = \lim s'_n$ de la série (2) ne saurait surpasser s. Or on démontrerait de la même manière que la valeur s de la série (1) ne saurait surpasser s'; donc on doit avoir

$$s = s',$$

donc la série (1) n'a pas changé de valeur. C. Q. F. D.

Supposons actuellement la série

$$(1)\qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

à termes quelconques.

Soient

$$(3)\qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots$$

la série de ses termes positifs pris dans le même ordre que dans la série (1),

$$(4)\qquad b_0 + b_1 + \ldots + b_k + \ldots$$

la série de ses termes négatifs également pris dans l'ordre où ils se trouvent dans l'équation (1). Supposons que la série (1) conserve sa convergence quand on rend ses termes positifs. Les séries (3) et (4) sont convergentes, et, si x et y désignent les valeurs respectives de ces séries, on a

$$(5)\qquad s = x - y.$$

Cela posé, changeons l'ordre des termes de la série (1); la série de ses termes positifs sera encore la série (3), à l'ordre des termes près. Or cette série est à termes positifs; donc elle conserve sa valeur. Même observation pour la série des termes négatifs et pour la série des valeurs absolues des termes de la série (1). Il en résulte, d'après le théorème IV, que la valeur de la série (1) transformée est encore $x - y$; donc la série (1) ne change pas de valeur quand on change l'ordre de ses termes. C. Q. F. D.

Remarque. — Toute cette démonstration repose sur l'égalité (5); donc, lorsque x ou y n'existeront pas, c'est-à-dire quand, dans la série proposée, les termes positifs et négatifs ne formeront pas des séries convergentes, la démonstration précédente tombera en défaut. Il est facile, du reste, de donner un exemple dans lequel on voit une série changer de valeur quand on change l'ordre de ses termes.

Considérons, par exemple, la série convergente

$$(1)\qquad \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \frac{1}{n+1} \pm \ldots.$$

Remarquons que la série des valeurs absolues de ses termes est identique avec la série harmonique qui est divergente.

En changeant simplement l'ordre des termes, on a la nouvelle série

$$(2)\qquad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots.$$

Je dis que la valeur de cette série est la moitié de la valeur de la série (1). En effet, soit

$$f(n)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}.$$

La valeur de la nouvelle série est la limite de $f(n)$ pour $n=\infty$; or on peut écrire

$$f(n)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$$

ou encore

$$f(n)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Pour $n=\infty$, la quantité entre crochets tend vers la valeur de la série (1) : ainsi la limite de $f(n)$ ou la valeur de la série (2) est la moitié de la valeur de la série (1); il est donc bien prouvé que l'on n'a pas toujours le droit de changer l'ordre des termes d'une série.

Jusqu'ici nous n'avons guère parlé que de séries à termes réels; mais on fait un fréquent usage en Analyse de séries à termes imaginaires.

Une série à termes imaginaires peut se mettre sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases}(u_0+v_0\sqrt{-1})+(u_1+v_1\sqrt{-1})\\ \qquad +(u_2+v_2\sqrt{-1})+\ldots+(u_n+v_n\sqrt{-1})+\ldots.\end{cases}$$

Cette série sera convergente si les deux séries

$$(2)\qquad u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

$$(3)\qquad v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots,$$

formées des parties réelles et des coefficients de $\sqrt{-1}$ dans tous ses termes, sont toutes deux convergentes.

En effet, soient s_n la somme des n premiers termes de la série (1), σ_n et τ_n les sommes des n premiers termes des séries (2) et (3); on a

$$s_n = \sigma_n + \tau_n \sqrt{-1}.$$

En passant aux limites et en désignant par σ et τ les valeurs des séries (2) et (4), on voit que

$$\lim s_n = \sigma + \tau \sqrt{-1};$$

donc la série (1) est convergente. C. Q. F. D.

Remarque. — Il est clair que, si l'une des séries (2) ou (3) eût été divergente, la série (1) l'eût été pareillement.

Théorème VI. — *Dans une série à termes imaginaires, si la série des modules des différents termes est convergente, cette série est elle-même convergente et l'on peut, sans altérer sa convergence, intervertir l'ordre des termes.*

En effet, considérons la série (1). Les séries de ses termes réels et des coefficients de $\sqrt{-1}$ sont convergentes indépendamment des signes de leurs termes, car ceux-ci sont respectivement plus petits que ceux de la série des modules qui est à termes positifs. On peut donc changer l'ordre des termes de ces séries sans en altérer la valeur, ce qui revient à dire que l'on peut changer l'ordre des termes de la série proposée elle-même. C. Q. F. D.

Une série qui ne perd pas sa convergence quand on réduit ses termes à leurs modules, et dont on peut altérer l'ordre des termes sans changer sa valeur, est dite *absolument convergente.*

§ III. — Règles de convergence.

On connaît un grand nombre de règles permettant de reconnaître si une série donnée est convergente; mais un petit nombre de caractères suffisent dans la plupart des cas, et nous allons les faire connaître.

Théorème I. — *Toute progression géométrique dont la raison est un nombre réel ou imaginaire de module moindre que* 1 *est une série convergente.*

En effet, une telle progression peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n + \ldots .$$

Or, quel que soit x, la somme des $n+1$ premiers termes est égale à

$$a\frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \text{ou} \quad a\frac{1}{1-x} - \frac{ax^{n+1}}{1-x}.$$

Si le module de x est moindre que 1, x^{n+1} tend vers zéro, et la somme des n premiers termes tend vers la limite finie $\frac{a}{1-x}$ pour $n = \infty$. La série (1) est donc convergente, ce qu'il fallait démontrer, et l'on a

$$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n + \ldots .$$

Si l'on remplace x par $\frac{z}{\alpha}$ en supposant $\operatorname{mod}\frac{z}{\alpha} < 1$, on a

$$\frac{a\alpha}{\alpha - z} = a + a\frac{z}{\alpha} + a\frac{z^2}{\alpha^2} + \ldots + a\frac{z^n}{\alpha^n} + \ldots$$

et, en faisant $a = \frac{1}{\alpha}$,

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{z}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^3} + \ldots + \frac{z^n}{\alpha^{n+1}} + \ldots ;$$

cette formule, qui nous sera utile plus tard, a lieu pour toutes les valeurs de z et de α, telles que $\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} \alpha$.

Théorème II. — *Si, dans une série à termes positifs*

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots ,$$

le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *d'un terme au précédent tend vers une limite inférieure à l'unité ou reste constamment inférieur à un nombre* α *fixe moindre que* 1, *cette série est convergente.*

Observons tout d'abord que, la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ étant moindre

que l'unité, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finira, pour des valeurs suffisamment grandes de n, par différer de sa limite de moins que cette limite ne diffère de l'unité et, par suite, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ finira par rester moindre qu'un nombre α fixe, moindre lui-même que l'unité; ainsi nous n'avons besoin de démontrer le théorème que pour le cas où l'on a, pour n suffisamment grand,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha;$$

de là on tire

$$u_{n+1} < \alpha u_n,$$

et de même

$$u_{n+2} < \alpha u_{n+1}, \quad u_{n+3} < \alpha u_{n+2}, \quad \ldots.$$

On tire de ces formules

$$u_{n+1} < \alpha u_n, \quad u_{n+2} < \alpha^2 u_n, \quad u_{n+3} < \alpha u_n^3, \quad \ldots.$$

La série considérée a donc ses termes respectivement moindres que les termes de la progression géométrique

$$\alpha u_n + \alpha^2 u_n + \alpha^3 u_n + \ldots,$$

dont la raison α est moindre que 1 et qui, par suite, est convergente; la série proposée elle-même est donc convergente.

Corollaire. — Si dans une série à termes quelconques la limite du rapport d'un terme au précédent a un module moindre que l'unité, ou si le rapport d'un terme au précédent conserve un module moindre qu'un nombre α fixe moindre que 1, *cette série est convergente.*

Car la série formée des modules de ses termes est convergente, en vertu du théorème précédent (p. 21).

REMARQUE I. — *Si le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tendait vers une limite supérieure à l'unité ou restait, à partir d'un certain terme, supérieur à l'unité, la série serait divergente, car les termes iraient en augmentant.*

Remarque II. — Si la limite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ était l'unité, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'étant pas constamment supérieur à 1, on ne pourrait plus rien affirmer relativement à la convergence de la série, et il faudrait avoir recours à d'autres caractères pour décider si la série proposée est convergente ou divergente.

Remarque III. — Il est facile d'évaluer une limite de l'erreur commise quand, pour calculer la valeur de la série (1), on se borne à faire la somme des n premiers termes. En effet, cette erreur est

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots ;$$

or $u_{n+1} < \alpha u_n$, $u_{n+2} < \alpha^2 u_n$, ..., d'après ce que l'on a vu : donc l'erreur est moindre que la valeur de la progression

$$\alpha u_n + \alpha^2 u_n + \alpha^3 u_n + \ldots$$

ou que

$$\frac{\alpha u_n}{1 - \alpha}.$$

Théorème III. — *Si l'on a deux séries à termes positifs, l'une convergente*

(1) $$s = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

et l'autre

(2) $$b_0 + b_1 + \ldots + b_n + b_{n+1} + \ldots,$$

telle que le rapport d'un terme précédent $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ *soit constamment inférieur au rapport correspondant* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *dans la première, cette dernière est convergente.*

En effet, la série (1) étant convergente, la suivante le sera aussi (¹) :

$$b_0 + \frac{b_0}{a_0} a_1 + \frac{b_0}{a_0} a_2 + \ldots + \frac{b_0}{a_0} a_n + \frac{b_0}{a_0} a_{n+1} + \ldots.$$

(¹) Si l'on éprouvait quelques doutes à cet égard, ils seraient levés par le théorème II du paragraphe suivant, théorème qui pourrait trouver sa place ici.

Cette série peut s'écrire ainsi :

$$(3) \qquad b_0 + b_0 \frac{a_1}{a_0} + b_0 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_1}{a_0} + \ldots + b_0 \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_1}{a_2} + \ldots .$$

Mais la série (2) peut se mettre sous la forme

$$b_0 + b_0 \frac{b_1}{b_0} + b_0 \frac{b_2}{b_1} \frac{b_1}{b_0} + \ldots + b_0 \frac{b_n}{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_1}{b_0} + \ldots;$$

or cette série a, en vertu de notre hypothèse, ses termes respectivement moindres que ceux de la série (3), qui est convergente; donc la série (2) est elle-même convergente.

C. Q. F. D.

Il est facile de déduire de là le théorème précédent.

Théorème IV. — *La série*

$$(1) \qquad \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \frac{1}{(n+1)^k} + \ldots$$

est convergente ou divergente selon que k est plus grand ou plus petit que 1.

En effet, supposons d'abord k plus grand que 1; la série précédente peut s'écrire, en groupant les termes (ce qui n'altère pas la convergence ou la divergence de la série, puisqu'elle a ses termes positifs), de la manière suivante :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \left(\frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} \right) + \ldots \\ & + \left[\frac{1}{(2^n+1)^k} + \frac{1}{(2^n+2)^k} + \ldots + \frac{1}{(2^{n+1})^k} \right] + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose $k > 1$, le terme général de la nouvelle série est moindre que $\frac{1}{2^{nk}}$ répété 2^n fois, c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{2^{n(k-1)}}$; les termes de cette série sont donc moindres que ceux de la progression géométrique décroissante

$$\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{(2^{k-1})^2} + \ldots + \frac{1}{(2^{k-1})^n} + \ldots ;$$

elle est par conséquent convergente.

Si au contraire $k < 1$, alors la série (2) a ses termes plus grands respectivement que ceux de la série harmonique ; elle est donc divergente dans ce cas.

Dans la série (1), le rapport d'un terme au précédent est de la forme

$$\frac{1}{(n+1)^k} : \frac{1}{n^k} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^k ;$$

si k est plus grand que 1, cette quantité est évidemment moindre que $\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. On peut donc énoncer le théorème suivant [1] :

Théorème V. — *Si dans une série le rapport d'un terme au précédent, ayant pour limite l'unité, peut se mettre sous la forme* $\frac{1}{1+\alpha}$, *et si* $n\alpha$ *tend vers une limite* k *plus grande que* 1, *cette série sera convergente.*

Les règles de convergence que nous venons de donner suffisent dans la plupart des cas ; nous donnerons dans les exercices quelques règles nouvelles, en laissant au lecteur le soin de les démontrer.

Applications. — 1° Cherchons si la série

$$1 + \frac{3}{5}x + \frac{5}{10}x^2 + \ldots + \frac{n^2-1}{n^2+1}x^{n-1} + \ldots$$

est convergente. On a ici, pour l'expression du rapport d'un terme au précédent,

$$\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}\,\frac{n^2+1}{n^2-1}\,x ;$$

pour $n = \infty$, la limite de cette expression est x. Donc la série est convergente si $\operatorname{mod} x < 1$, divergente si $\operatorname{mod} x > 1$; enfin, si $\operatorname{mod} x = 1$, elle est encore divergente, parce que les

---

[1] Raabe et Duhamel l'ont trouvé à peu près en même temps.

modules des termes ont pour limite 1 et par suite ne tendent pas vers zéro.

2° Cherchons si la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n^2 - n} + \ldots$$

est convergente. Le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale $\frac{n^2 - n}{(n+1)^2 - (n+1)}$, dont la limite est 1. Cette expression peut s'écrire

$$1 : \left(1 + \frac{2n}{n^2 - n}\right).$$

En multipliant $\frac{2n}{n^2 - n}$ par n, on obtient une quantité dont la limite, pour $n = \infty$, est 2. Donc la série est convergente.

IV. — Des calculs que l'on peut effectuer sur les séries.

Théorème I. — *Si l'on considère les séries convergentes*

$$A = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots,$$
$$B = b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots,$$
$$C = c_0 + c_1 + \ldots + c_n + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

la série ayant pour terme général

$$u_n = \pm a_n \pm b_n \pm c_n \pm \ldots$$

est convergente et a pour valeur $\pm A \pm B \pm C \pm \ldots$

En effet, on a

$$\sum_0^n u = \pm \sum_0^n a \pm \sum_0^n b \pm \sum_0^n c \pm \ldots.$$

Si l'on suppose que n augmente indéfiniment, on voit que $\sum_0^n u$ a une limite égale à $\pm A \pm B \pm C \pm \ldots$, ce qui démontre le théorème énoncé.

THÉORÈME II. — *Si la série*

$$s = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente et a pour valeur s,

$$a u_0 + a u_1 + \ldots + a u_n + \ldots$$

sera convergente et aura pour valeur as.

En effet,

$$\sum_0^n (a u) = a \sum_0^n u.$$

Donc, si n augmente indéfiniment, $\sum_0^n (a u)$ a une limite égale à $a \lim \sum_0^n u$ ou à as. C. Q. F. D.

THÉORÈME III. — *Si la série*

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente et a tous ses termes positifs, si de plus $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont des nombres positifs qui ne croissent pas au delà de toute limite,

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + \ldots$$

sera convergente.

En effet, en désignant par A un nombre plus grand que $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, cette série a ses termes respectivement plus petits que ceux de la série convergente

$$A s = A u_0 + A u_1 + \ldots + A u_n + \ldots,$$

qui est aussi à termes positifs.

Abel a démontré que le théorème précédent était encore vrai pour une série convergente quelconque si les nombres a_0, $a_1, \ldots, a_2, \ldots$ allaient constamment en décroissant; en effet, dans cette hypothèse, en posant

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + \ldots + u_n = s_n,$$

$$(2) \qquad a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = t_n,$$

on a les relations suivantes :

$$u_0 = s_0, \quad u_1 = s_1 - s_0, \quad \ldots, \quad u_n = s_n - s_{n-1}, \quad \ldots,$$

et par conséquent, en portant ces valeurs dans l'équation (2),

$$t_n = a_0 s_0 + a_1(s_1 - s_0) + \ldots + a_n(s_n - s_{n-1}),$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$(3) \qquad t_n = (a_0 - a_1)s_0 + (a_1 - a_2)s_1 + \ldots + a_n s_n.$$

Dans cette égalité, les coefficients de s_0, s_1, ... sont tous positifs, car a_0, a_1, ... vont en décroissant; mais, si θ désigne une moyenne entre les quantités s_0, s_1, ..., s_n, on aura

$$t_n = \theta[(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + a_n] = a_0\theta.$$

Or, n augmentant indéfiniment, θ conserve une valeur finie; donc t_n conserve une valeur finie. Supposons alors s_0, s_1, ..., s_n, ... positifs (s'il n'en était pas ainsi, on augmenterait convenablement u_0); t_n croît, en vertu de l'équation (3), avec n, sans devenir infini : il a donc une limite; par suite, la série (2) est convergente. C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Si les séries*

$$(1) \qquad s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$(2) \qquad t = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

sont absolument convergentes, c'est-à-dire si la série des modules de leurs termes est convergente (p. 20), *la série dont le terme général est*

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots + u_n v_0$$

est convergente et a pour valeur st.

1° Supposons d'abord les séries (1) et (2) à termes positifs; nous aurons

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_0^n u \sum_0^n v = \sum_0^n w &+ u_1 v_n + u_2(v_{n-1} + v_n) + \ldots \\ &+ u_n(v_1 + v_2 + \ldots + v_n). \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant le produit $\sum_0^m u \sum_0^m v$. Le terme de ce produit dans lequel la somme des indices est la plus

grande est $2m$. Si donc $2m$ est moindre que $n+1$, ou si m est le plus grand entier contenu dans $\frac{n+1}{2}$, tous les termes de $\sum_0^m u \sum_0^m v$ se trouvent compris dans $\sum_0^n w$. On a donc

$$\sum_0^n w > \sum_0^m u \sum_0^m v.$$

Or, en vertu de l'égalité (3),

$$\sum_0^n w < \sum_0^n u \sum_0^n v.$$

Mais, si l'on suppose que m et n augmentent indéfiniment, $\sum_0^n u \sum_0^n v$ et $\sum_0^m u \sum_0^m v$ tendront tous deux vers st. Alors $\sum_0^n w$, qui reste compris constamment entre ces deux produits, tendra aussi vers la limite st. Le théorème qui nous occupe est donc démontré pour le cas où les séries (1) et (2) sont à termes positifs.

2° Supposons que les séries (1), (2) à termes réels ne perdent pas leur convergence quand on rend leurs termes positifs. Considérons d'abord les termes des séries (1) et (2) en valeur absolue. Tout ce qui dans l'égalité (3) suit $\sum_0^n w$ a pour limite zéro, car $\sum_0^n u \sum_0^n v$ et $\sum_0^n w$ ont même limite, d'après ce que nous venons de voir tout à l'heure. Il en sera encore de même *a fortiori* quand on aura rendu aux termes des séries (1) et (2) leurs signes respectifs. Par conséquent, si dans l'égalité (3) nous supposons que n augmente indéfiniment, il vient, en passant aux limites,

$$st = \lim \sum_0^n w,$$

ce qui démontre que le théorème est encore applicable dans le cas où les séries ne perdent pas leur convergence quand on rend leurs termes positifs.

3° Considérons enfin le cas où les séries (1) et (2) seraient à termes imaginaires. Nous supposerons les séries des modules de leurs termes convergentes, et nous poserons en général

$$u_n = p_n(\cos\alpha_n + \sqrt{-1}\sin\alpha_n),$$
$$v_n = q_n(\cos\beta_n + \sqrt{-1}\sin\beta_n).$$

Alors, en vertu de ce que nous avons démontré dans le premier cas, la différence

$$\sum_0^n p \sum_0^n q - \sum_0^n pq = p_1 q_n + p_2(q_{n-1} + q_n) + \ldots$$
$$+ p_n(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$$

aura pour limite zéro; il en sera de même *a fortiori* de la quantité

$$p_1(\cos\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin\alpha_1)\,q_n(\cos\alpha_n + \sqrt{-1}\sin\alpha_n)$$
$$+ (p_2\cos\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin\alpha_2)\left[q_{n-1}(\cos\alpha_{n-1} + \sqrt{-1}\sin\alpha_{n-1})\right.$$
$$\left. + q_n(\cos\alpha_n + \sqrt{-1}\sin\alpha_n)\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui n'est autre chose que $u_1 v_2 + u_2(v_{n-1} + v_n) + \ldots$. L'égalité (3), en passant aux limites, fournira donc encore $st = \sum_0^n w$, et le théorème est encore vrai dans ce dernier cas.

V. — Sur un théorème de Cauchy.

Presque tous les théorèmes que nous avons établis directement sur les séries sont la conséquence immédiate du théorème suivant de Cauchy :

Pour qu'une série soit convergente, il faut et il suffit que la somme des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tende vers zéro quand n et p augmentent indéfiniment, quelle que soit la manière dont on fait croître ces deux nombres.

Toute la démonstration que nous allons faire repose sur le

sens que l'on attribue à ces mots « *quelle que soit la manière dont on fait croître n et p* » ; nous allons l'expliquer. Soit

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots + u_{n+p} + \ldots$$

une série ; nous avons déjà prouvé que, si l'on appelle s_n la somme des n premiers termes, $s_{n+p} - s_n$ tend vers zéro, quel que soit p, quand n augmente indéfiniment si la série est convergente ; ce qu'il faut prouver, c'est que :

S'il est possible de trouver des nombres n et p tels que, ν étant supérieur ou égal à n, π supérieur ou égal à p, on ait, quels que soient d'ailleurs ν et π,

$$(1) \qquad \operatorname{mod}(s_{\nu+\pi} - s_\nu) < \varepsilon,$$

ε étant une quantité donnée fixe, aussi petite que l'on voudra, la série est convergente.

La formule (1) revient à celle-ci

$$s_{\nu+\pi} - s_\nu = \theta\varepsilon,$$

θ désignant une quantité de module moindre que 1. Supposons $\varepsilon < 1$; π peut être pris assez grand pour que, quel que soit π', on ait de même

$$s_{\nu+\pi+\pi'} - s_{\nu+\pi'} = \theta'\varepsilon^2.$$

θ' désignant une quantité de module moindre que 1, π'' peut être pris assez grand pour que

$$s_{\nu+\pi+\pi'+\pi''} - s_{\nu+\pi+\pi'} < \theta''\varepsilon^3,$$

et ainsi de suite. Ajoutons ces formules, nous aurons

$$s_{\nu+\pi+\pi'+\ldots} - s_\nu = \theta\varepsilon + \theta'\varepsilon^2 + \theta''\varepsilon^3 + \ldots.$$

La différence entre s_ν et la somme $s_{\nu+\pi+\pi+\ldots}$ d'un nombre consécutif de termes de la série aussi grand que l'on veut est donc représentée par une série convergente $\theta\varepsilon + \theta'\varepsilon^2 + \ldots$, puisque les modules de ses termes sont moindres que les termes de la progression $\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots$, qui est convergente. Cela revient à dire que, en faisant croître l'indice n d'une certaine façon, la somme s_n tend vers une limite fixe s. Je

dis que, de quelque manière que croisse cet indice, la limite sera toujours la même. En effet, supposons n et n' assez grands; $\text{mod}(s_{n'} - s_n)$, par hypothèse, peut être rendu moindre que ε; en d'autres termes, on peut poser

$$s_{n'} = s_n + \theta\varepsilon;$$

or s_n a une limite s et l'on peut poser en même temps

$$s_n = s + \theta'\varepsilon,$$

θ' ayant un module moindre que 1; donc

$$s_{n'} = s + \theta\varepsilon + \theta'\varepsilon.$$

$s_{n'}$ diffère donc de s d'aussi près que l'on veut : donc enfin la série proposée est convergente.

VI. — Séries uniformément convergentes.

Une série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots + u_{n+p} + \ldots$$

dont les différents termes sont fonctions de x, y, z, ... est dite *uniformément convergente* entre des limites données de ces variables, s'il est possible de prendre n assez grand, mais fixe, de telle sorte que, quelles que soient les valeurs données à x, y, z, ... entre les limites en question, on ait toujours, quel que soit p,

$$\text{mod} \sum_{i=N+p}^{i=N} u_i < \varepsilon,$$

ε étant une quantité fixe quelconque et N désignant une quantité égale ou supérieure à n.

La série

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

est uniformément convergente pour les valeurs de x dont le module est inférieur à $\alpha < 1$; car, pour rendre

$$\text{mod}(x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots) < \varepsilon,$$

il suffit de prendre

$$\operatorname{mod} \frac{x^{n+1}}{1-x} < \varepsilon.$$

On satisfait à cette formule en prenant

$$\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} < \varepsilon \quad \text{ou} \quad n+1 < \frac{\log(\varepsilon - \alpha\varepsilon)}{\log \alpha},$$

ce qui détermine pour n une valeur indépendante de x.

Au contraire, la série

$$x(e^{-x} - 2e^{-2x}) + x(2e^{-2x} - 3e^{-3x}) + \ldots$$
$$+ x(ne^{-nx} - \overline{n+1}\, e^{-\overline{n+1}x}) + \ldots$$

est convergente quel que soit x, puisque la somme de ses n premiers termes est $xe^{-x} - (n+1)xe^{-(n+1)x}$, qui, pour $n = \infty$, a pour limite xe^{-x}; mais elle n'est pas uniformément convergente pour les valeurs de x voisines de zéro, puisque, pour satisfaire à la formule

$$xe^{-x} - (n+1)xe^{-\overline{n+1}x} < \varepsilon,$$

il faudrait prendre

$$(n+1)e^{-\overline{n+1}x} > e^{-x} - \frac{\varepsilon}{x},$$

et que les valeurs de n susceptibles de satisfaire à cette inégalité dépendent de x et croissent quand x tend vers zéro.

VII. — Théorème d'Abel.

Théorème I. — *Soient $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ des fonctions continues de x, pour toutes les valeurs de cette variable contenues dans une aire A. Supposons que, pour ces valeurs de x, la série*

$$(1) \qquad F(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

soit uniformément convergente; la valeur $F(x)$ de la série sera continue pour toutes les valeurs de x en question.

En effet, posons

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_{n-1}(x) = \psi(x),$$
$$\varphi_n(x) + \varphi_{n+1}(x) + \ldots = R(x);$$

on aura

$$F(x) = \psi(x) + R(x),$$

et, en donnant à x un accroissement h, tel que le point $x+h$ soit, comme x, à l'intérieur de l'aire de A,

$$F(x+h) = \psi(x+h) + R(x+h).$$

De ces formules, on tire

$$F(x+h) - F(x) = \psi(x+h) - \psi(x) + R(x+h) - R(x);$$

or, la série (1) étant uniformément convergente, on peut, quel que soit x, satisfaire à la formule

$$\text{mod}\, R(x) < \varepsilon$$

au moyen d'une même valeur de n; on aura donc aussi pour cette valeur

$$\text{mod}\, R(x+h) < \varepsilon$$

et, par suite,

$$(2) \qquad \text{mod}[R(x+h) - R(x)] < 2\varepsilon.$$

n ayant été ainsi choisi, on pourra, puisque $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sont des fonctions continues en nombre limité et que, par suite, leur somme $\psi(x)$ est continue, satisfaire à la formule

$$(3) \qquad \text{mod}[\psi(x+h) - \psi(x)] < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de h dont le module sera inférieur à une quantité H. En observant que le module d'une somme est moindre que la somme des modules de ses parties et en ajoutant (2) et (3), on voit que l'on aura, pour toutes les valeurs de h suffisamment voisines de zéro,

$$\text{mod}[\psi(x+h) - \psi(x) + R(x+h) - R(x)] < 3\varepsilon$$

ou

$$\text{mod}[F(x+h) - F(x)] < 3\varepsilon;$$

or 3ε est, comme ε, une quantité aussi petite que l'on veut; donc la valeur $F(x)$ de la série (1) est continue.

Théorème II. — *Toute série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, telle que*

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

dans laquelle a_0, a_1, a_2, ... sont indépendants de x, est uniformément convergente pour tous les points intérieurs à un cercle décrit de l'origine comme centre; elle est divergente pour tous les points extérieurs.

Ce cercle, dont le rayon peut être nul ou infini, a été appelé par Cauchy le *cercle de convergence* de la série; son rayon est le *rayon de convergence.*

Pour démontrer ce théorème, désignons par ρ_0, ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n, ... les modules de a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... et par r le module de x; supposons que, le module de x ayant une valeur R, la série (1) soit convergente : je dis qu'elle sera encore convergente pour tout module r de x, tel que $r < R$.

En effet, la série

$$1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} + \ldots + \frac{r^n}{R^n} + \ldots,$$

progression géométrique dont la raison $\frac{r}{R}$ est moindre que 1, est une série convergente, qui ne perd pas sa convergence quand on multiplie ses termes par ρ_0, $\rho_1 R$, $\rho_2 R^2$, ..., nombres qui ne croissent pas indéfiniment, puisque ces quantités sont les modules des termes de la série (1), convergente par hypothèse pour une certaine valeur de r, dont le module est R. La série

$$(2) \qquad \rho_0 + \rho_1 r + \rho_2 r^2 + \ldots + \rho_n r^n + \ldots$$

est donc convergente; or c'est la série des modules des termes de (1) pour $r < R$; cette série (1) est donc elle-même convergente pour $r < R$.

On démontrerait de même que, si la série (1) était divergente pour une valeur R du module r de x, elle serait encore divergente pour $r > R$. Si donc on donne à x des modules croissants, il arrivera un moment où la série cessera d'être convergente; tous les points intérieurs au cercle du rayon R décrit de l'origine comme centre rendront la série convergente; tous les points extérieurs la rendront divergente. C. Q. F. D.

Je dis maintenant que la série est uniformément convergente à l'intérieur du cercle de convergence ou, plus exactement, à l'intérieur d'un cercle de rayon R moindre que le rayon de convergence d'une quantité fixe λ, aussi petite que l'on voudra du reste.

En effet, on a

$$\rho_n r^n + \rho_{n+1} r^{n+1} + \ldots < \mathrm{M}\left(\frac{r^n}{\mathrm{R}^n} + \frac{r^{n+1}}{\mathrm{R}^{n+1}} + \ldots\right),$$

M désignant la plus grande des quantités $\rho_n \mathrm{R}^n$, $\rho_{n+1}\mathrm{R}^{n+1}$, ..., qui est finie d'après ce que nous avons déjà observé. Cette formule donne successivement

$$\begin{aligned}\rho_n r^n + \rho_{n+1} r^{n+1} + \ldots &< \mathrm{M}\,\frac{r^n}{\mathrm{R}^n}\,\frac{1}{1-\dfrac{r}{\mathrm{R}}}\\ &< \mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{R}-\lambda}{\mathrm{R}}\right)^n \frac{1}{1-\left(\dfrac{\mathrm{R}-\lambda}{\mathrm{R}}\right)}.\end{aligned}$$

On aura donc

$$\rho_n r^n + \rho_{n+1} r^{n+1} + \ldots < \varepsilon,$$

si l'on prend

$$\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{R}-\lambda}{\mathrm{R}}\right)^n \frac{1}{1-\dfrac{\mathrm{R}-\lambda}{\mathrm{R}}} < \varepsilon.$$

La valeur de n que l'on déduit de là est indépendante de x; donc la série est bien uniformément convergente.

C. Q. F. D.

Théorème d'Abel. — *Toute série ordonnée suivant les puissances croissantes de x représente une fonction continue de x à l'intérieur de son cercle de convergence.*

Une pareille série est, en effet, uniformément convergente à l'intérieur de son cercle de convergence.

Exemples. — 1° La série

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

a pour rayon de convergence 1; elle représente une fonction

continue quand $\operatorname{mod} x < 1$, et en effet elle est égale à $\frac{1}{1-x}$.

2° La série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

que nous étudierons plus loin, est convergente quel que soit x, car le rapport du $(n+1)^{\text{ème}}$ terme au précédent est $\frac{x}{n}$, qui tend vers zéro quand n croît indéfiniment; le rayon de convergence est infini et la fonction représentée par la série est toujours continue.

3° La série

$$1 + x + 1.2x^2 + \ldots + 1.2.3\ldots nx^n + \ldots$$

toujours divergente, excepté pour $x = 0$, a un rayon de convergence nul; elle ne représente rien.

VIII. — Théorème général sur les séries.

On sait que deux polynômes entiers en x, égaux quel que soit x, ont leurs coefficients égaux; on peut généraliser ce théorème comme il suit :

Théorème. — *Si l'on a pour toutes les valeurs de x dont le module est moindre qu'une quantité finie, ou même seulement pour les valeurs réelles de x moindres qu'une quantité finie,*

$$(1)\quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots,$$

a_0, a_1, ..., b_0, b_1, ... désignant des quantités indépendantes de x, on aura

$$a_0 = b_0,\quad a_1 = b_1,\quad \ldots,\quad a_n = b_n,\quad \ldots$$

En effet, si l'on fait $x = 0$ dans la formule (1), on trouve $a_0 = b_0$; supprimant de part et d'autre a_0 et b_0, qui sont égaux, et divisant par x, on a

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \ldots.$$

Cette formule a lieu pour les mêmes valeurs de x que (1), excepté peut-être pour $x = 0$; mais, en vertu du théorème d'Abel, les deux membres sont fonctions continues de x; pour $x = 0$, elles convergent vers les limites a_1 et b_1. Donc, comme ces deux membres restent toujours égaux, leurs limites a_1 et b_1 sont égales. Supprimant a_1 et b_1 de part et d'autre et divisant par x, on a

$$a_2 + a_3 x + \ldots = b_2 + b_3 x + \ldots;$$

d'où l'on conclura encore $a_2 = b_2$, et ainsi de suite.

IX. — Développement d'une fonction rationnelle en série.

Commençons par chercher le développement d'une expression de la forme $\frac{1}{(x-a)^m}$, m désignant un entier positif et a et x des quantités quelconques. Si le module de x est plus grand que celui de a, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \ldots + \frac{a^n}{x^{n+1}} + \ldots.$$

En effet, le second membre de cette formule est une progression géométrique décroissante dont le premier terme est $\frac{1}{x}$ et la raison $\frac{a}{x}$; la limite de la somme de ses termes est bien $\frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{a}{x}}$ ou $\frac{1}{x-a}$.

Cela posé, je dis que l'on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(x-a)^m} = (x-a)^{-m} = \frac{1}{x^m} + \frac{m}{1}\frac{a}{x^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{a^2}{x^{m+2}} + \ldots \\ + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}\frac{a^n}{x^{m+n}} + \ldots; \end{aligned} \right.$$

en d'autres termes, la formule du binôme s'applique encore au cas où l'exposant est négatif, pourvu que le module de a soit moindre que celui de x. Pour démontrer cette for-

mule (2), nous allons vérifier que, si elle a lieu pour une valeur de m, elle aura encore lieu pour la valeur supérieure d'une unité, et, comme elle a lieu pour $m = 1$, elle sera générale.

D'abord, je dis que le dernier membre de la formule (2) est une série convergente. En effet, l'expression du rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{m+n-1}{n}\,\frac{a}{x} = \left(\frac{m-1}{n}+1\right)\frac{a}{x};$$

pour $n = \infty$, cette quantité tend vers $\frac{a}{x}$. Si donc $\bmod \frac{a}{x} < 1$ ou si $\bmod a < \bmod x$, la série sera convergente. Nous supposerons donc $\bmod a < \bmod x$; en multipliant le dernier membre de la formule (2) par $x - a$, il devient

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{m-1}} &+ \left(\frac{m}{1}-1\right)\frac{a}{x^{m-2}} + \left[\frac{m(m+1)}{1.2} - \frac{m}{1}\right]\frac{a^2}{x^{m-3}} + \ldots \\ &+ \left[\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n} - \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2\ldots n-1}\right]\frac{a^n}{x^{m-n-1}} + \ldots\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{m-1}} &+ \frac{m-1}{1}\,\frac{a}{x^{m-2}} + \frac{(m-1)m}{1.2}\,\frac{a^2}{x^{m-3}} + \ldots \\ &+ \frac{(m-1)m\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{a^n}{x^{m-n-1}} + \ldots.\end{aligned}$$

Cette quantité, par hypothèse, est égale à $\frac{1}{(x-a)^{m-1}}$; la formule (2) est donc démontrée.

La formule du binôme a donc encore lieu pour les valeurs entières et négatives de l'exposant.

Cela posé, considérons une fonction rationnelle de x; on pourra la décomposer en un polynôme entier $E(x)$ et en une suite de fractions simples de la forme $\frac{A}{(x-a)^m}$. Si donc $\bmod x$ est supérieur à chacune des quantités $\bmod a$, les fractions $\frac{A}{(x-a)^m}$ se développeront en série suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ et la fonction rationnelle se développera elle-même de

cette façon, mais le développement contiendra des termes entiers en x si le polynôme $E(x)$ n'est pas nul.

Si le module de x n'est pas supérieur au module de toutes les quantités a, on observera que, si $\operatorname{mod} x < \operatorname{mod} a$, on aura

$$\frac{1}{(x-a)^m} = \frac{(-1)^m}{(a-x)^m} = \pm\left(\frac{1}{a^m} + \frac{m}{1}\frac{x}{a^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{1.2}\frac{x^2}{a^{m+2}} + \ldots\right),$$

et alors le développement de la fonction rationnelle aura lieu en une double série ordonnée suivant les puissances de x et de $\frac{1}{x}$.

Enfin, si le module de x est moindre que celui de toutes les quantités a, il est clair que la fonction rationnelle sera développable suivant les puissances croissantes de x seulement.

X. — Séries récurrentes.

On appelle *séries récurrentes* des séries ordonnées suivant les puissances d'une même variable et telles qu'il existe, à partir d'un certain moment, une même relation linéaire entre les coefficients des divers termes consécutifs de la série ; cette relation, ou plutôt les coefficients de cette relation, forment ce que l'on appelle l'*échelle* de relation de la série.

Théorème. — *Le développement d'une fraction rationnelle est récurrent.*

En effet, supposons le développement effectué suivant les puissances croissantes de la variable ; le théorème, s'il est vrai dans ce cas, le sera encore dans le cas où le développement aurait lieu suivant les puissances décroissantes, car un développement qui a lieu suivant les puissances décroissantes de la variable x peut être censé avoir lieu suivant les puissances croissantes de la variable $\frac{1}{x}$.

Considérons la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$, dans laquelle

$f(x)$ et $F(x)$ désignent des polynômes entiers en x; supposons que $F(x)$ n'ait pas de racines nulles : cela ne nuit en rien à la généralité, car $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$E(x) + \frac{A}{x^m} + \frac{B}{x^{m-1}} + \ldots + \frac{L}{x} + \frac{f_1(x)}{\varphi(x)},$$

$E(x)$ désignant un polynôme entier, si $F(x)$ contient x en facteur; alors $\varphi(x)$ est de degré supérieur à $f_1(x)$ et ne contiendra plus x en facteur.

Soient donc

$$f(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_{\mu-1} x^{\mu-1},$$
$$F(x) = q_0 + q_1 x + \ldots + q_\mu x^\mu,$$

et

(1) $$\frac{f(x)}{F(x)} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

les p, les q et les a désignant des constantes. Si x est assez petit, la série (1), d'après ce que l'on a vu, sera convergente et l'on pourra obtenir $a_0, a_1, \ldots$ soit par la méthode des coefficients indéterminés, soit par la division, dont les règles ont été précisément établies par la méthode des coefficients indéterminés.

Nous emploierons la méthode des coefficients indéterminés et, chassant le dénominateur dans (1), puis remplaçant $F(x)$ et $f(x)$ par leurs expressions, nous aurons

(2) $$\left\{\begin{aligned}&(p_0 + p_1 x + \ldots + p_{\mu-1} x^{\mu-1})\\ &\quad = (q_0 + q_1 x + \ldots + q_\mu x^\mu)(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots).\end{aligned}\right.$$

Effectuons le produit indiqué et égalons de part et d'autre les coefficients de x^0, x, x^2, x^3, $\ldots$, nous aurons

$$\begin{aligned}
p_0 &= q_0 a_0,\\
p_1 &= q_0 a_1 + q_1 a_0,\\
p_2 &= q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_{\mu-1} &= q_0 a_{\mu-1} + q_1 a_{\mu-2} + \ldots + q_{\mu-1} a_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

(3) $$0 = q_0 a_n + q_1 a_{n-1} + q_2 a_{n-2} + \ldots + q_\mu a_{n-\mu}.$$

Ces formules déterminent successivement $a_0, a_1, a_2, \ldots$; la formule (3) est l'échelle de relation. On voit que, si $n > \mu - 1$, cette formule est une relation linéaire et homogène entre les coefficients de $\mu + 1$ termes consécutifs de la série.

Réciproquement, si la relation (3) a lieu entre les termes de la série

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

supposée convergente, celle-ci est le développement d'une fonction rationnelle. En effet, l'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{q_0}{x^n} a_n x^n + \frac{q_1}{x^{n-1}} a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \frac{q_\mu}{x^{n-\mu}} a_{n-\mu} x^{n-\mu} = 0;$$

on a de même

$$\frac{q_0}{x^n} a_{n+1} x^{n+1} + \frac{q_1}{x^{n-1}} a_n x^n + \ldots + \frac{q_\mu}{x^{n-\mu}} a_{n-\mu+1} x^{n-\mu+1} = 0,$$

. . . .

En ajoutant toutes ces formules, on a

$$\frac{q_0}{x^n} \sum_n^\infty a_n x^n + \frac{q_1}{x^{n-1}} \sum_{n-1}^\infty a_n x^n + \ldots + \frac{q_\mu}{x^{n-\mu}} \sum_{n-\mu}^\infty a_n x^n = 0$$

ou

$$\left(\frac{q_0}{x^n} + \frac{q_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{q_\mu}{x^{n-\mu}}\right) \sum_n^\infty a_n x^n - \frac{q_1}{x^{n-1}} a_n x^n$$
$$- \frac{q_2}{x^{n-2}} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}) - \ldots = 0;$$

on en conclut

$$\sum_n^\infty a_n x^n = \frac{P}{Q},$$

P et Q désignant deux fonctions rationnelles de x. Donc :

Théorème II. — *Toute série récurrente est le développement d'une fonction rationnelle de x.*

XI. — Théorème d'Eisenstein.

Soient a_{ij} des entiers; posons

$$X_0 = a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \ldots + a_{0\mu}x^\mu,$$
$$X_1 = a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \ldots + a_{1\mu}x^\mu,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et supposons que l'inconnue y de l'équation

$$(1) \qquad y^m X_m + y^{m-1} X_{m-1} + \ldots + y X_1 + X_0 = 0$$

soit développable en série de la forme

$$(2) \qquad y = b_{10} + b_{11}x + b_{12}x^2 + \ldots + b_{1i}x^i + \ldots;$$

on aura

$$(2) \qquad \begin{cases} y^2 = b_{20} + b_{21}x + b_{22}x^2 + \ldots + b_{2i}x_i + \ldots, \\ y^3 = b_{30} + b_{31}x + b_{32}x^2 + \ldots + b_{3i}x_i + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

d'ailleurs

$$(3) \qquad \begin{cases} b_{2i} = b_{10}b_{1i} + b_{11}b_{1i-1} + \ldots + b_{1i}b_{10}, \\ b_{3i} = b_{10}b_{2i} + b_{11}b_{2i-1} + \ldots + b_{1i}b_{20}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{ji} = b_{10}b_{j-1i} \qquad\qquad + \ldots + b_{1i}b_{j-10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les valeurs (2) de $y, y^2, \ldots$ étant portées dans l'équation (1), celle-ci doit être satisfaite identiquement. Ainsi, quel que soit x,

$$\begin{aligned} &(a_{m0} + a_{m1}x + \ldots)(b_{m0} + b_{m1}x + \ldots) \\ &\quad + (a_{m-10} + a_{m-11}x + \ldots)(b_{m-10} + b_{m-11}x + \ldots) + \ldots \\ &\qquad\qquad + a_{00} + a_{01}x + \ldots = 0; \end{aligned}$$

on doit donc avoir

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{m0}b_{m0} + a_{m-10}b_{m-10} + \ldots + a_{00} = 0, \\ (a_{m0}b_{m1} + a_{m-1}b_{m0}) + \ldots + a_{01} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{m0}b_{m\mu} + \ldots + a_{m\mu}b_{m0}) + \ldots + a_{0\mu} = 0. \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} (a_{m0}b_{m\mu+1} + \ldots + a_{m\mu}b_{m1}) + \ldots + 0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En vertu des équations (3), b_{2i} sera fonction de $b_{10}, b_{11}, \ldots b_{1i}$ et ne contiendra pas $b_{1,i+1}, b_{1,i+1}, \ldots$: donc b_{3i} sera fonction des mêmes quantités et ne contiendra pas non plus $b_{1,i+1}$, $b_{1,i+2}, \ldots$.

Les μ équations (4) pourront donc servir à calculer $b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1\mu}$. Je suppose que ces nombres soient rationnels, ainsi que b_{10}, que l'on peut calculer directement : c'est la valeur de y pour $x = 0$.

La première équation (5) fournira $b_{1\mu+1}$; le coefficient de cette quantité ne pourra provenir que des termes

$$(6) \qquad a_{m0}b_{m,\mu+1} + a_{m-1\,0}b_{m-1,\mu+1} + \ldots + a_{10}b_{1,\mu+1}.$$

Or, en n'écrivant dans $b_{1,\mu+1}, b_{2,\mu+1}, \ldots$ que les termes contenant $b_{1,\mu+1}$, on a, en vertu de (3),

$$b_{1,\mu+1} = 2b_{10}b_{1,\mu+1} + \ldots,$$
$$b_{3,\mu+1} = (2b_{10}^2 + b_{20})b_{1,\mu+1} + \ldots = 3b_{10}^2 b_{1,\mu+1} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En portant ces valeurs dans (6), on voit que cette expression sera de la forme

$$P\,b_{1,\mu+1} + Q,$$

P désignant un polynôme entier en b_{10} à coefficients entiers et indépendant du nombre μ. Il résulte de là que $b_{1,\mu+1}$ sera de la forme

$$b_{1,\mu+1} = \frac{f(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1\mu})}{P};$$

on aura de même

$$b_{1,\mu+2} = \frac{f(b_{12}, b_{13}, \ldots, b_{1,\mu+1})}{P},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

f désignant une fonction entière à coefficients entiers. Les seuls facteurs premiers qui pourront entrer en dénominateur dans b_{1k}, où $k > \mu$, sont faciles à déterminer. P est un polynôme en b_{10} du degré m ; en multipliant donc par la puissance $m^{\text{ième}}$ du dénominateur de b_{10}, on pourra mettre $b_{1,\mu+1}$ sous la forme

$$b_{1,\mu+1} = \frac{F(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1\mu})}{R}.$$

R désignant un entier et F une fonction entière à coefficients entiers, $b_{1,\mu+2}$ sera de la forme

$$b_{1,\mu+2} = \frac{F(b_{12}, b_{13}, \ldots, b_{1,\mu+1})}{R}.$$

Supposons b_{12}, b_{13}, ... réduits à leur plus simple expression; les seuls facteurs premiers qui entrent dans le dénominateur de $b_{1,\mu+1}$ seront ceux qui entrent dans les dénominateurs de b_{12}, b_{13}, ... (que nous supposerons réduits à leur plus simple expression) et dans R, il en sera de même de $b_{1,\mu+2}$, $b_{1,\mu+3}$. On a donc le théorème suivant :

Si l'on considère une série

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

dans laquelle $b_0, b_1, b_n, \ldots$ sont des fractions réduites à leur plus simple expression, elle ne pourra pas être le développement d'une racine y d'une équation algébrique en x et y à coefficients entiers si les dénominateurs de b_0, b_1, b_n, ... ne contiennent pas un nombre limité de facteurs premiers.

Ce beau théorème mettra en évidence le caractère transcendant d'une foule de fonctions.

XII. — Développements en série de e^x, sin x et cos x.

Cherchons la limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ quand m croît indéfiniment en passant par des valeurs entières; la connaissance de cette limite nous sera utile dans un très grand nombre de circonstances. On a

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + m\frac{x}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{x^2}{m^2} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\frac{x^n}{m^n} + \ldots$$

ou

$$(1)\quad \begin{cases} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1.2} + \ldots \\ + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots; \end{cases}$$

or on sait que, α, β, γ, ... étant positifs, et tels que $\alpha+\beta+\gamma+\ldots<1$, on a

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\ldots<1-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots);$$

on peut donc écrire

$$(1-\alpha)(1-\beta)\ldots=1-\theta(\alpha+\beta+\ldots),$$

θ désignant un nombre compris entre 0 et 1. Prenons $\alpha=\frac{1}{m}$, $\beta=\frac{2}{m}$, $\gamma=\frac{3}{m}$, ..., nous aurons

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)=1-\theta_{n-1}\frac{n(n-1)}{2m},$$

θ_{n-1} étant un nombre compris entre 0 et 1; la formule (1) s'écrira alors

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^m}{1.2.3\ldots m}$$
$$+\frac{x^2}{2m}\left[1+\frac{x}{1}\theta_2+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\theta_{n-1}+\ldots+\frac{x^{m-2}\theta_{m-1}}{1.2\ldots m-2}\right].$$

La suite écrite sur la première ligne tend vers la valeur de la série convergente

$$(2)\qquad s=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

quand m augmente indéfiniment. La suite écrite entre crochets a un module inférieur à la valeur de la série convergente

$$1+\frac{r}{1}+\frac{r^2}{1.2}+\ldots+\frac{r^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

où r est le module de x; d'ailleurs $\frac{x^2}{2m}$ tend vers zéro. On a donc

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=s,$$

en particulier,

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e,$$

en appelant e la valeur de la série convergente

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

que l'on trouve égale à 2,718281828459045....

Je dis que $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ a encore pour limite e quand m croît en passant par des valeurs quelconques. En effet, soient n et $n+1$ deux entiers comprenant m supposé positif; on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

On peut écrire cette formule ainsi :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n+1}\right);$$

les membres extrêmes ont pour limite e quand $m = \infty$; donc $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ a aussi pour limite e.

Enfin, en appelant m un nombre négatif, il est facile de voir que la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ est encore e quand m croît indéfiniment. En effet, posons $m = -n$, nous aurons

$$\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

$$= \lim \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e.$$

On a, en supposant x réel,

$$s = \lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \lim \left[\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x;$$

or rien n'empêche de poser $\frac{x}{m} = \frac{1}{\alpha}$; α croîtra indéfiniment avec m et l'on aura

$$s = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha\right]^x = e^x.$$

Ainsi on a, en vertu de (2),

$$(3) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^2}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Supposons maintenant x imaginaire et remplaçons-le par $x + y\sqrt{-1}$; on aura, en vertu de (2),

$$(4) \lim\left(1 + \frac{x+y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = 1 + \frac{x+y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \ldots.$$

Calculons le premier membre; cherchons d'abord son module :

$$\lim \operatorname{mod}\left(1 + \frac{x+y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = \lim\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{m^2}\right]^{\frac{m}{2}}$$

$$= \lim\left(1 + \frac{2mx + x^2 + y^2}{m^2}\right)^{\frac{m}{2}}$$

$$= \lim\left[\left(1 + \frac{2mx + x^2 + y^2}{m^2}\right)^{\frac{m^2}{2mx+x^2+y^2}}\right]^{\frac{2mx+x^2+y^2}{2m}}$$

ou, en désignant $\dfrac{2mx + x^2 + y^2}{m^2}$ par α,

$$= \lim\left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha\right]^{\frac{2mx+x^2+y^2}{2m}} = e^x.$$

Cherchons maintenant son argument; l'argument de

$$1 + \frac{x+y\sqrt{-1}}{m}$$

est compris entre son sinus et sa tangente, c'est-à-dire entre

$$\frac{\dfrac{y}{m}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{x}{m}\right)^2 + \dfrac{y^2}{m^2}}} \quad \text{et} \quad \frac{\dfrac{y}{m}}{1+\dfrac{x}{m}};$$

l'argument de $\left(1 + \dfrac{x+y\sqrt{-1}}{m}\right)^m$, m fois plus grand, sera compris entre

$$\frac{y}{\sqrt{\left(1+\dfrac{x}{m}\right)^2 + \dfrac{y^2}{m^2}}} \quad \text{et} \quad \frac{y}{1+\dfrac{x}{m}},$$

qui tendent tous deux vers y pour $m = \infty$. On a donc

$$\lim\left(1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y),$$

c'est-à-dire, en vertu de (4),

$$e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = 1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x + y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \ldots;$$

en particulier, si l'on prend $x = 0$,

$$\cos y + \sqrt{-1}\sin y = 1 + \frac{y\sqrt{-1}}{1} - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \ldots;$$

et, en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2.3.4.6.5} + \ldots,$$

$$\sin y = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

Ces formules, toujours convergentes, donnent les développements de $\cos y$ et $\sin y$ en série.

XIII. — Généralisation de la fonction exponentielle et des fonctions circulaires.

La fonction définie par la série toujours convergente

(1) $$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

est égale à e^x quand x est réel; il est tout naturel de la représenter par le symbole e^x quand x est imaginaire : c'est ce que nous ferons; nous aurons alors, en changeant x en $x + y\sqrt{-1}$,

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x + y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \ldots;$$

si l'on compare cette formule avec la formule (3) du paragraphe précédent, on voit que

$$(2) \qquad e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y);$$

de cette formule on peut déduire toutes les propriétés des exponentielles : ainsi, par exemple, on a

$$\begin{aligned} e^{x+y\sqrt{-1}}e^{x'+y'\sqrt{-1}} &= e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)e^{x'}(\cos y' + \sqrt{-1}\sin y') \\ &= e^{x+x'}\cos(\overline{y+y'} + \sqrt{-1}\sin\overline{y+y'}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, quels que soient z et z',

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}.$$

On aurait de même

$$e^z : e^{z'} = e^{z-z'}, \quad (e^z)^m = e^{mz}, \quad \ldots.$$

Les formules démontrées au paragraphe précédent, pour le cas où x est réel,

$$(2) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$(3) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

et qui sont toujours convergentes, peuvent également servir à définir $\cos x$ et $\sin x$ quand x est imaginaire. Multiplions (3) par $\sqrt{-1}$ et ajoutons avec (2) : nous aurons

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \ldots,$$

c'est-à-dire, en vertu de (1),

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}}.$$

En changeant x en $-x$, on a

$$\cos x - \sqrt{-1}\sin x = e^{-x\sqrt{-1}};$$

d'où l'on tire

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

formules importantes et qu'il faut retenir. Ces formules pourraient servir de définition aux fonctions $\cos x$ et $\sin x$, quel que soit x; il est facile d'en déduire la formule d'addition des arcs : ainsi

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \frac{e^{(x+y)\sqrt{-1}} + e^{-(x+y)\sqrt{-1}}}{2} \\ &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\,\frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2} \\ &\quad - \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\,\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.\end{aligned}$$

On démontrerait de même les formules

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

qui se trouvent établies même pour les valeurs imaginaires de x et y.

La fonction a^x, peu usitée, se définira par le moyen de l'équation

$$a^x = e^{x \log a}.$$

La fonction $\operatorname{tang} x$ se définira par cette autre formule

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x};$$

$\cot x$, $\operatorname{coséc} x$ se définiront au moyen des relations

$$\cot x = \frac{1}{\operatorname{tang} x}, \quad \operatorname{coséc} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}.$$

XIV. — Origine purement analytique des sinus et des cosinus.

Comme plus haut, prenons pour définition de la fonction e^x la formule suivante, vraie pour les valeurs réelles de x,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots;$$

alors on aura

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \ldots + \frac{y^n}{n!} + \ldots;$$

on en déduirait par multiplication

$$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} + \ldots + \left[\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\frac{y}{1!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\frac{y^2}{2!} + \ldots\right] + \ldots$$

ou

$$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left[x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 + \ldots\right] + \ldots$$

ou

$$e^x e^y = 1 + \frac{x+y}{1} + \ldots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \ldots$$

ou enfin

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

La fonction e^x, *définie comme on vient de le dire,* 1° *est continue* en vertu du théorème d'Abel; 2° *elle jouit de la propriété*

(1) $$e^x e^y = e^{x+y},$$

et en général de toutes les propriétés de la fonction exponentielle réelle que l'on peut en déduire.

Avec la fonction e^x on peut former les fonctions composées

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2}.$$

Nous connaissons les deux dernières; si elles nous étaient inconnues, on pourrait les appeler $\sin x$ et $\cos x$; $\sin x$ et $\cos x$ sont ainsi définis d'une façon purement analytique : les deux premières fonctions sont ce que l'on appelle le *cosinus* et le *sinus hyperboliques* de x. Nous poserons donc

(2) $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

(3) $$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

on en déduit immédiatement

$$\cos\mathrm{h}\,x = \cos x\sqrt{-1}, \quad \sin\mathrm{h}\,x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\sin x\sqrt{-1},$$

$$\cos\mathrm{h}\,x + \sin\mathrm{h}\,x = e^x,$$

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}},$$

$$\cos\mathrm{h}\,x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

$$\sin\mathrm{h}\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots.$$

Des formules (3) on tire, comme on l'a déjà vu,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x.$$

Des formules (2) on déduirait de même

$$\cos^2\mathrm{h}\,x - \sin^2\mathrm{h}\,x = 1,$$

$$\cos\mathrm{h}(x+y) = \cos\mathrm{h}\,x\cos\mathrm{h}\,y + \sin\mathrm{h}\,x\sin\mathrm{h}\,y,$$

$$\sin\mathrm{h}(x+y) = \sin\mathrm{h}\,x\cos\mathrm{h}\,y - \sin\mathrm{h}\,y\cos\mathrm{h}\,x,$$

et ces nouvelles fonctions sont continues par rapport à x.

$\frac{\sin x}{\cos x}$ et $\frac{\sin\mathrm{h}\,x}{\cos\mathrm{h}\,x}$ sont les tangentes ordinaires et hyperboliques de x; les inverses du sinus, du cosinus, de la tangente sont ce que l'on appelle la *cosécante*, la *sécante* et la *cotangente*.

La formule

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots;$$

lorsque x est réel, peut se mettre sous la forme

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{\theta x^4}{1.2.3.4}, \tag{4}$$

θ désignant un nombre inférieur à 1 puisque, en posant

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2},$$

l'erreur est moindre que $\frac{x^4}{1.2.3.4}$; mais cela suppose les termes de la série décroissants à partir de $\frac{x^4}{1.2.3.4}$; il suffit pour remplir cette condition que x soit inférieur ou égal à 2; or, pour $x = 2$, la formule (4) donne

$$\cos x = 1 - 2 + \theta \frac{16}{24},$$

$\cos x$ est donc négatif pour $x = 2$; pour $x = 0$, il est positif : donc, entre 0 et 2, l'équation $\cos x = 0$ a une racine au moins. Soit $\frac{\pi}{2}$ la plus petite racine positive de $\cos x = 0$; on aura

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos - \frac{\pi}{2} = 0.$$

On a ensuite, en vertu de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$,

$$\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \mp 1:$$

mais, de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{2}$, $\cos x$ reste positif; $\sin x$, d'abord positif, ne saurait passer par zéro, puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, et par suite ne saurait changer de signe : donc

$$\sin\frac{\pi}{2} = +1, \quad \sin - \frac{\pi}{2} = -1.$$

Il est facile de prouver que $\sin x$ et $\cos x$ ont pour *période* 2π, c'est-à-dire que

$$\cos(2\pi + x) = \cos x, \quad \sin(2\pi + x) = \sin x.$$

On a en effet

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y;$$

donc, faisant $y = \frac{\pi}{2}$,

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x;$$

on aurait d'une façon analogue

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x;$$

donc, en changeant x en $x+\frac{\pi}{2}$,

$$\cos(x+\pi)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x,$$

$$\sin(x+\pi)=-\sin x;$$

changeant x en $x+\pi$, on a

$$\cos(x+2\pi)=\cos x,$$
$$\sin(x+2\pi)=\sin x.$$

Le nombre π reste à calculer; on verra plus loin comment on peut le développer en série.

Nous retrouvons ainsi toute la Trigonométrie, en la généralisant, et nous voyons, ce qui est important, que les fonctions circulaires ont une origine purement analytique qui rend leur théorie indépendante du *postulatum* d'Euclide et des autres *postulata* de la Géométrie.

XV. — Des logarithmes en général.

Toute imaginaire peut être mise sous la forme

$$r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

r désignant le module et θ l'argument; mais $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ est égal à $e^{\theta\sqrt{-1}}$: donc toute imaginaire peut se mettre aussi sous la forme

$$re^{\theta\sqrt{-1}}$$

et même sous la forme

$$e^{\log r}e^{\theta\sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad e^{\log r+\theta\sqrt{-1}}.$$

On voit donc qu'il existe un nombre $u=\log r+\theta\sqrt{-1}$ tel que e^u soit un nombre donné, $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$; ce

nombre u est ce que nous appellerons le *logarithme* de

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

Ainsi *le logarithme d'une imaginaire est l'imaginaire qu'il faut prendre pour exposant de e pour reproduire l'imaginaire donnée.*

Le logarithme de l'imaginaire $r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ étant $\log r + \theta\sqrt{-1}$, on peut dire que :

Le logarithme d'une imaginaire est égal au logarithme de son module, augmenté de son argument multiplié par $\sqrt{-1}$.

Ce logarithme a donc une infinité de valeurs, puisque l'argument est lui-même susceptible d'une infinité de valeurs.

Par exemple, le logarithme de la quantité réelle et positive r, dont l'argument est $2k\pi$, sera

$$\log r + 2k\pi\sqrt{-1},$$

$\log r$ désignant le logarithme ordinaire de r.

$$\log 1 = 2k\pi\sqrt{-1}, \quad \log -1 = (2k+1)\pi\sqrt{-1},$$

$$\log\sqrt{-1} = \frac{4k+1}{2}\pi\sqrt{-1}, \quad \ldots.$$

Quel que soit a, on définit a^x par l'équation

$$a^x = e^{x\log a};$$

il est clair alors que l'on a

$$a^x a^y = e^{x\log a} e^{y\log a} = e^{(x+y)\log a} = a^{x+y},$$

$$a^x : a^y = a^{x-y},$$

$$(a^x)^m = (e^{x\log a})^m = e^{mx\log a} = a^{mx}.$$

On n'a pas éprouvé jusqu'ici le besoin de définir les logarithmes imaginaires dans une autre base que e.

Il va sans dire que l'on a, comme dans le cas où x et y sont réels,

$$\log x + \log y = \log(x + y),$$

$$\log x - \log y = \log\frac{x}{y},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ces formules découlant de

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

XVI. — Fonctions circulaires et hyperboliques inverses.

Les fonctions inverses de $\sin x$, $\sinh x$, $\cos x$, $\cosh x$, ... sont désignées par $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\sinh x$, $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\cosh x$, ... Ces fonctions inverses peuvent toutes s'exprimer au moyen des logarithmes; par exemple, si l'on fait

$$\operatorname{arc}\sin x = u,$$

on en tire

$$x = \sin u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

ou

$$e^{2u\sqrt{-1}} - 2\, e^{u\sqrt{-1}}\, x\sqrt{-1} - 1 = 0,$$

d'où

$$e^{u\sqrt{-1}} = x\sqrt{-1} \pm \sqrt{1 - x^2}$$

et, par suite,

$$u = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left(x\sqrt{-1} \pm \sqrt{1 - x^2}\right),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$u = -\frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) + \frac{4k+1}{2}\pi.$$

On trouve ainsi les formules suivantes :

$$\operatorname{arc}\sin x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) - \frac{4k+1}{2}\pi,$$

$$\operatorname{arc}\cos x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \log\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{arc}\operatorname{tang} x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + x\sqrt{-1}}{1 - x\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + 2x\sqrt{-1} - x^2}{1 + x^2},$$

$$\operatorname{arc}\sinh x = \log\left(x \pm \sqrt{1 + x^2}\right),$$

$$\operatorname{arc}\cosh x = \log\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{arc}\operatorname{tangh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x}.$$

XVII. — Digression sur la nature des exponentielles.

Le théorème d'Eisenstein, démontré page 43, montre que e^x, $\sin x$, $\cos x$ ne peuvent être racines d'une équation algébrique de la forme $f(x, y) = 0$, f désignant un polynôme à coefficients entiers : ce sont donc bien des fonctions transcendantes et il en est alors de même des fonctions $\operatorname{tang} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{sinh} x$, ..., car les fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$, développées suivant les puissances de x, se composent de termes dont les coefficients sont des fractions irréductibles qui contiennent en dénominateur une infinité de nombres premiers.

Il ne faudrait pas conclure de là que e^x ne peut pas être un nombre rationnel pour des valeurs particulières de x. Nous verrons plus tard que e^x, quand x est entier, et que π, π^2 ne sauraient être commensurables; pour le moment, bornons-nous à démontrer l'incommensurabilité de e. On a

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots m} + \ldots;$$

si e était commensurable, on pourrait le supposer égal à une fraction $\frac{p}{q}$ ayant ses deux termes p, q entiers et premiers entre eux; on en conclurait

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots q} + \ldots$$

et, en multipliant par $1.2\ldots q$,

$$1.2.3(q-1)p = 1.2.3\ldots q + \ldots + 1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots,$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathrm{E} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots,$$

E désignant un entier; or je vais prouver que le second membre de cette formule est moindre que 1. Cette formule

sera donc absurde et e ne pourra pas affecter la forme $\frac{p}{q}$: il sera donc incommensurable. On a en effet

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots<\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+\ldots$$

ou

$$<\frac{1}{q}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On prouve d'une façon analogue que e ne peut être racine d'une équation du second degré à coefficients entiers.

XVIII. — Quelques théorèmes concernant les séries doubles.

On appelle *séries doubles* une suite indéfinie de termes que l'on peut supposer rangés de la façon suivante.

A chacune de ces quantités attribuons deux indices, en sorte que l'une quelconque d'entre elles puisse être représentée par u_{ij} : on pourra alors regarder i et j comme deux coordonnées et l'on supposera la quantité u_{ij} écrite sur le point du plan ayant pour coordonnées les nombres entiers i et j.

Une série double

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} u_{00}+u_{01}+u_{02}+\ldots+u_{0n}+\ldots \\ +u_{10}+u_{11}+u_{12}+\ldots+u_{1n}+\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +u_{n0}+u_{n1}+u_{n2}+\ldots+u_{nn}+\ldots \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

est dite *convergente* lorsque, ayant décrit un contour quelconque coupant l'axe des x et l'axe des y, la somme des termes de la série contenue à l'intérieur de ce contour tend vers une limite déterminée toujours la même, quelle que soit la manière dont le contour se déforme, lorsque ce contour s'éloigne indéfiniment de l'origine. Cette limite est la *valeur* de la série.

Théorème I. — *Pour que la série* (1) *soit convergente, il faut que u_{ij} tende vers zéro quand i et j croissent indéfiniment.*

Théorème II. — *Si une série double à termes positifs est convergente, toute série à termes égaux ou plus petits respectivement et positifs est convergente aussi.*

Théorème III. — *Si a_{ij} désigne le module de u_{ij} et si la série dont le terme général est a_{ij} est convergente, celle dont le terme général est u_{ij} est convergente aussi.*

Théorème IV. — *Une série double à termes positifs ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre de ses termes.*

Théorème V. — *Il en est de même pour une série quelconque, lorsque la série des modules de ses termes est convergente.*

Théorème VI. — *La série double dont le terme général est $x^m y^n$, x et y désignant des nombres moindres que* 1, *ou dont le module est moindre que* 1, *est convergente.*

En effet, si l'on fait la somme des termes contenus dans un rectangle contenant m termes dans une rangée horizontale et n termes dans une rangée verticale, on trouve

$$\frac{1}{1-x}+\frac{y}{1-x}+\ldots+\frac{y^{n-1}}{1-x}-\frac{x^m}{1-x}-\frac{yx^m}{1-x}-\ldots-\frac{y^{n-1}x^m}{1-x}$$

ou

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)}-\frac{y^n}{(1-x)(1-y)}-\frac{x^m}{(1-x)(1-y)}+\frac{y^n x^m}{(1-y)(1-x)};$$

quand m et n croissent indéfiniment, cette somme se réduit à $\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-y}$. Si x et y sont positifs, la somme en question a toujours même limite, quel que soit le contour dans lequel

on emprisonne les termes de la série; donc la limite est la même quand x et y sont imaginaires.

Théorème VII. — *Si la somme des termes d'une série double tend vers une limite déterminée, les termes pris dans la somme étant contenus dans un contour c qui grandit indéfiniment en tout sens, en suivant une loi déterminée, la série sera convergente pourvu qu'elle soit à termes positifs.*

En effet, la somme des termes contenus dans un contour c' différent de c peut toujours être supposée contenue dans un contour c suffisamment grand. Soient s la somme des termes relatifs au contour c, s' la somme des termes relatifs au contour c' : on aura $s' < s$; or s, par hypothèse, a une limite S : donc $s' < S$; donc s' croissant avec c' a une limite $S' \leqq S$; on verrait de même que $S \leqq S'$; donc $S = S'$. C. Q. F. D.

Il résulte des théories précédentes que, pour évaluer la valeur d'une série double telle que (1), on peut la considérer comme la limite de la somme des termes contenus dans un rectangle dont la hauteur serait infinie et dont la base irait en croissant indéfiniment, ou dont la base serait d'abord infinie et dont la hauteur irait en croissant indéfiniment (en appelant *base* la dimension horizontale et *hauteur* la dimension verticale). Ainsi la valeur de la série (1) supposée convergente peut s'écrire à volonté

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} u_{0n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{1n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} u_{2n} + \ldots$$

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} u_{m0} + \sum_{m=0}^{m=\infty} u_{m1} + \sum_{m=0}^{m=\infty} u_{m2} + \ldots$$

XIX. — Application destinée à faire comprendre l'utilité de la théorie des séries doubles.

En évaluant la série double convergente

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
x + \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots \\
x^2 + \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^6}{3!} + \ldots + \dfrac{x^m}{n!} + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^m + \dfrac{x^{2m}}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \dfrac{x^{mn}}{n!} + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

de deux manières, on trouve l'identité

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
(e^{x^1} - 1) + (e^{x^2} - 1) + \ldots + (e^{x^n} - 1) + \ldots \\
\qquad = \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1}{1.2}\,\dfrac{x^2}{1-x^2} + \ldots + \dfrac{1}{1.2\ldots n}\,\dfrac{x^n}{1-x^n} + \ldots .
\end{array}
\right.
$$

Pourquoi la série (1) est-elle convergente? Pourquoi la formule (2) a-t-elle lieu? Son premier membre est-il convergent? Voici la réponse à ces questions :

1° Le second membre de (2) est convergent, parce que le rapport d'un terme au précédent a pour limite zéro; 2° la série double (2) est convergente, parçe que la série formée par les modules de ses termes est convergente; et, en effet, les termes réduits à leurs modules forment une série convergente, puisqu'on peut trouver une limite à la somme des termes compris dans des contours rectangulaires; 3° la série (1) étant convergente, on peut la sommer en prenant les termes compris dans des rectangles de bases infinies, ce qui fournit le premier membre de (2).

EXERCICES ET NOTES.

1. La série $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ est convergente lorsque la limite de $(\bmod\, u^{\frac{1}{n}})^n$ est moindre que 1 quand n croît indéfiniment, ou quand cette quantité reste constamment moindre qu'une quantité finie moindre que 1. (*Voir* une démonstration de ce théorème Ch. XIII, § V.)

2. Supposons que, dans la série $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + A n^{\lambda-1} + B n^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + a n^{\lambda-1} + b n^{\lambda-2} + \ldots}.$$

si la première des quantités $A - a$, $B - b$, ... qui ne s'annule pas est positive, la série est divergente; la série est convergente ou divergente suivant que $A - a + 1$ est négatif ou positif. (GAUSS.)

3. La série $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ est convergente ou divergente suivant que l'on a

$$\lim \frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} > \text{ ou } < 1.$$

4. La série

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \ldots + \frac{1}{n \log n} + \ldots$$

est divergente.

5. Si $r_0, r_1, r_2, \ldots$ sont des nombres indéfiniment décroissants et θ un arc qui ne soit pas multiple de π, les séries

$$r_0 + r_1 \cos\theta + r_2 \cos 2\theta + \ldots + r_n \cos n\theta + \ldots,$$
$$r_1 \sin\theta + r_2 \sin 2\theta + \ldots + r_n \sin n\theta + \ldots$$

sont convergentes. (BJÖRLING.)

6. $a, b, c, \ldots$ désignant les nombres premiers impairs, on a

$$\frac{x}{1-x} - \sum \frac{x^a}{1-x^a} + \sum \frac{x^{ab}}{1-x^{ab}} - \sum \frac{x^{abc}}{1-x^{abc}} + \ldots$$
$$= x + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots. \qquad \text{(CATALAN.)}$$

7. Si m est entier et positif, on a

$$1 - \frac{m^p}{1^p} + \frac{m^p(m^p-1)}{1^p 2^p} - \frac{m^p(m^p-1)(m^p-2)}{1^p . 2^p . 3^p} + \ldots = 0.$$

No. 7 not true. If the nos. in the num^r. had each the index p it would be true.

Quand m n'est pas entier, le premier membre est une série dont on demande les conditions de convergence.

8. Étudier les conditions de convergence de la série

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \dots .$$

9. Calculer à $\frac{1}{10^7}$ près la valeur de la série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots .$$

10. On a

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1,$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots = \frac{1}{4}.$$

Généraliser.

10. La série

$$\frac{1}{\sqrt{1.2}} + \frac{1}{\sqrt{2.3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$$

est-elle convergente?

11. La série double

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.4} + \dots \\ \frac{1}{3.2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3.4} + \dots \\ \frac{1}{4.2} + \frac{1}{4.3} + \frac{1}{4^2} + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

dont le terme général est $\frac{1}{m.n}$, est divergente.

12. La série double dont le terme général est $\frac{1}{m^n}$ est convergente : sa valeur est égale à $\frac{1}{2}\left(\text{son premier terme étant } \frac{1}{2^2}\right)$.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES DÉRIVÉES.

I. — Définition de la dérivée.

Quand une fonction $f(x)$ est continue, l'accroissement que prend cette fonction $f(x+h)-f(x)$ est infiniment petit avec l'accroissement correspondant h de sa variable, et en général, comme nous le verrons, la limite du rapport de ces deux accroissements infiniment petits est fini. On lui donne le nom de *dérivée de la fonction* $f(x)$.

Ainsi la *dérivée* d'une fonction $f(x)$ est la limite du rapport de l'accroissement que prend la fonction à l'accroissement correspondant de la variable quand ce dernier tend vers zéro.

La dérivée d'une fonction de x, $f(x)$, est en général une autre fonction de x, que l'on désigne pas $f'(x)$. Quand une fonction de x est représentée par une seule lettre y, sa dérivée est représentée par y'.

Il est difficile, peut-être impossible, de prouver que toute fonction continue admet une dérivée; quoi qu'il en soit, nous admettrons dans ce qui va suivre que les fonctions sur lesquelles nous raisonnerons ont des dérivées. Nous prouverons d'ailleurs, en montrant comment on peut les calculer, que la plupart des fonctions que l'on rencontre en Analyse ont des dérivées. En résumé, si $f(x)$ désigne une fonction, $f'(x)$ sa dérivée, on a par définition

$$f'(x)=\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

pour $h=0$.

De là on déduit

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)+\varepsilon,$$

ε désignant une quantité qui tend vers zéro avec h, ou

(1) $$f(x+h)-f(x) = hf'(x)+h\varepsilon,$$

formule fréquemment employée.

S'il n'est pas prouvé que toute fonction continue a une dérivée, il est bien clair, au contraire, que toute fonction qui admet une dérivée finie est continue : c'est ce que montre la formule (1); on voit en effet que, si l'on y suppose h infiniment petit, $f(x+h)-f(x)$ est infiniment petit. Ainsi, quand une fonction a une dérivée finie, à un accroissement infiniment petit quelconque de la variable correspond un accroissement infiniment petit de la fonction, ce qui veut dire que cette fonction est continue.

Le mot *dérivée* et la notation que nous avons adoptée pour représenter la dérivée sont de Lagrange, mais, au fond, l'idée de dérivée remonte à Leibnitz et à Newton. Nous ferons bientôt connaître la notation de Leibnitz. La notation de Newton n'est plus employée aujourd'hui; il représentait la dérivée de y relative à x par $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Cauchy a souvent employé la notation $D_x y$.

II. — Dérivée d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un quotient.

Dérivée d'une somme algébrique. — *Soient u, v, w, ... des fonctions de x; a, b, c, ... des constantes; si u', v', w', ... désignent les dérivées de u, v, w, ..., la dérivée de*

$$y = au+bv+cw+\ldots$$

sera

$$y' = au'+bv'+cw'+\ldots.$$

En effet, appelons Δx (Δ désignant non plus une quantité,

mais bien les mots *accroissement de*) un accroissement infiniment petit donné à x, et soient Δu, Δv, ... Δy les accroissements que prennent alors u, v, w, ..., y; on aura, en changeant, dans l'égalité $y = au + bv + cw$, x en $x + \Delta x$,

$$y + \Delta y = a(u + \Delta u) + b(v + \Delta v) + \dots;$$

d'où, par soustraction,

$$\Delta y = a\,\Delta u + b\,\Delta v + \dots$$

et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + b\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + \dots;$$

or, pour $\Delta x = 0$, les limites de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\cdots$ sont par définition les dérivées y', u', v', ... On a donc, en passant aux limites,

$$y' = au' + bv' + cw' + \dots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire I. — La dérivée d'une somme $u + v + w + \dots$ *est la somme* $u' + v' + w' + \dots$ *des dérivées de ses parties.*

Corollaire II. — La dérivée d'une différence $u - v$ *est la différence* $u' - v'$ *des dérivées de ses termes.*

Le raisonnement fait plus haut suppose le nombre des fonctions u, v, w, ... limité, car on s'est appuyé sur ce que la limite de la somme $a\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + b\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + \dots$ était égale à la somme des limites de ses parties, ce qui n'est vrai que si le nombre des parties est limité; on verra que :

La dérivée d'une série ne s'obtient pas toujours en prenant la dérivée de chaque terme.

Dérivée d'un produit. — Considérons un produit

$$y = uvw\dots$$

de plusieurs fonctions u, v, ... ayant pour dérivées u', v', w', ... Si l'on change x en $x + \Delta x$, u, v, ..., y prendront des accroissements Δu, Δv, ... Δy et se changeront en $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, ... et l'on aura

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)\dots$$

et, par soustraction,

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)\ldots - uvw\ldots$$

ou, en développant,

$$\Delta y = \Delta u\, vw + \ldots + \Delta v\, uw + \ldots + \Omega,$$

Ω désignant des termes contenant au moins deux des facteurs Δu, Δv, ... On en tire

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} vw + \ldots + \frac{\Delta v}{\Delta x} uw + \ldots + \frac{\Omega}{\Delta x};$$

or $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, ... ont pour limites les dérivées u', v', ...; donc $\frac{\Omega}{\Delta x}$ tend vers zéro avec Δx et l'on a, en passant aux limites,

$$y' = u' vw + \ldots + v' uw + \ldots + \ldots.$$

En divisant par $y = uvw\ldots$, on a

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots,$$

formule plus facile à retenir.

La dérivée d'un produit est, comme l'on voit, la somme des dérivées de chaque facteur multiplié par le produit des autres.

La démonstration suppose, bien entendu, les facteurs du produit en nombre fini.

Application. — La dérivée de u^m, m désignant un entier, sera la somme de m produits, tels que $u'.u^{m-1}$ ou $mu'u^{m-1}$.

La dérivée de x est 1, car sa dérivée est, en appelant h un accroissement donné à h, $\lim \frac{h}{h}$ ou 1; il en résulte que *la dérivée de x^m est $m x^{m-1}$.*

La dérivée d'une constante est zéro, car l'accroissement d'une constante est nul; son accroissement divisé par h est encore nul, et la limite de ce quotient est, par suite, zéro; il résulte de là que, a désignant une constante et u une fonction, la

dérivée de au est au', ce qui s'accorde avec ce que l'on a vu plus haut.

Dérivée d'un quotient. — Soit $y = \frac{u}{v}$ le quotient de deux fonctions u, v qui ont des dérivées u', v'; soit Δx un accroissement donné à la variable x, et Δy, Δu, Δv les accroissements correspondants de y, u, v; on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}\right) : \Delta x = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{\Delta x(v + \Delta v)v},$$

en faisant tendre Δx vers zéro, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent vers y', u', v', et la formule précédente devient

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2};$$

ainsi $\frac{u'v - v'u}{v^2}$ est la dérivée de $\frac{u}{v}$.

Application. — La dérivée de $\frac{1}{v}$ est $-\frac{v'}{v^2}$, celle de $\frac{1}{x^m}$ est $-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}$; donc : *la dérivée de x^m pour m entier et négatif est mx^{m-1}.*

III. — Dérivée d'une fonction de fonction.

Si y est fonction de u, que u soit fonction de v, ... et que v soit fonction de x, on dira que y est *fonction de fonction* de x.

Supposons que Δy, Δu, Δv, ... soient les accroissements que prennent y, u, v, ... quand x croît de la quantité infiniment petite Δx; on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Si l'on passe aux limites, $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ sera la dérivée de y prise par rapport à u, que nous représenterons par y'_u; $\frac{\Delta u}{\Delta v}$ sera la

dérivée de u prise par rapport à v : nous l'appellerons u'_v ; enfin $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ sera v'_x. On a donc

$$y' \text{ ou } y'_x = y'_u\, u'_v\, v'_x.$$

Applications. — 1° Soit $y = (x^2 - 1)^3$; y' sera le produit de y'_{x^2-1} par la dérivée de $x^2 - 1$ ou $3(x^2-1)^2\, 2x$.

2° On a évidemment $y'_y = 1$; or $y'_y = y'_x\, x'_y$: donc

$$y'_x \cdot x'_y = 1 \quad \text{ou} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

IV. — Dérivées de quelques fonctions simples.

Dérivée de $\log x$. — La dérivée de $\log x$ est la limite vers laquelle tend, pour $h = 0$,

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \log\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \log\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}};$$

or la limite de $\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$ est e : donc la dérivée cherchée est $\log e^{\frac{1}{x}}$ ou $\frac{1}{x}$.

Corollaire. — La dérivée de $\log u$, u étant fonction de x, sera, d'après le théorème des fonctions de fonctions démontré au paragraphe précédent, $\frac{u'}{u}$; cette quantité s'appelle la *dérivée logarithmique* de u.

Dérivée de a^x. — Posons

$$y = a^x;$$

nous aurons

$$\log y = x \log a \quad \text{ou} \quad x = \frac{\log y}{\log a}.$$

x a une dérivée par rapport à y ; en d'autres termes, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$

a une limite : donc $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite aussi et y a une dérivée. En prenant alors les dérivées des deux membres de l'équation précédente, on a

$$1 = \frac{y'}{y \log a},$$

$$y' = y \log a = a^x \log a.$$

Corollaire. — En prenant $a = e$, on a $y' = e^x$: ainsi la dérivée de e^x est e^x, celle de e^u est $e^u u'$.

Dérivée de x^m. — Supposons x positif (x^m n'aurait d'ailleurs aucun sens si m était incommensurable et x négatif); on a

$$x^m = e^{m \log x}$$

et, par suite, la dérivée de x^m est celle de $e^{m \log x}$ ou $e^{m \log x} \frac{m}{x}$ ou $m x^{m-1}$, comme on l'a vu, dans le cas où m est entier.

Si x est négatif, on fera $x = -x'$; alors

$$x^m = (-x')^m.$$

La dérivée de x^m est celle de $(-1)^m x'^m$ ou

$$(-1)^m m x'^{m-1}(-1) \quad \text{ou} \quad m(-1)^{m-1} x'^{m-1} \quad \text{ou} \quad m x^{m-1}.$$

Corollaire. — La dérivée de u^m est $m u^{m-1} u'$, celle de $\sqrt[m]{u} = u^{\frac{1}{m}}$ est $\frac{1}{m} u^{\frac{1}{m}-1}$, celle de $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{1}{2} u' u^{-\frac{1}{2}}$ ou $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

V. — Dérivées des fonctions circulaires.

Dérivée de $\sin x$. — La dérivée de $\sin x$ est la limite, pour $h = 0$, de

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h},$$

ou de

$$\frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Le rapport d'un sinus à son arc, quand cet arc $\frac{h}{2}$ tend vers zéro, a pour limite l'unité; la limite de l'expression précédente est donc $\cos x$: ainsi la dérivée de $\sin x$ est $\cos x$.

Dérivée de $\cos x$. — On a $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et par suite, en vertu du théorème des fonctions de fonctions, la dérivée de $\cos x$ sera la dérivée de $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ prise par rapport à $\frac{\pi}{2} - x$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, multipliée par la dérivée de $\frac{\pi}{2} - x$ ou -1; la dérivée cherchée est donc $-\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ou $-\sin x$. On peut y arriver en cherchant la limite de

$$\frac{1}{h}\left[\cos(x+h) - \cos x\right].$$

Dérivée de $\operatorname{tang} x$. — C'est la dérivée du quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$ ou

$$\frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dérivée de $\operatorname{séc} x$. — C'est celle de $\frac{1}{\cos x}$ ou $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, ...

Dérivée de $\operatorname{arc}\sin x$. — Si l'on pose

$$y = \operatorname{arc}\sin x,$$

on a

$$x = \sin y,$$

et, par suite, en prenant la dérivée des deux membres,

$$1 = \cos y . y';$$

donc

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

y' est de même signe que $\cos y$; il n'y aura donc aucun doute sur le signe à adopter dans les différents cas.

Dérivée de $\operatorname{arc}\cos x$. — On a

$$\operatorname{arc}\cos x + \operatorname{arc}\sin x = \frac{\pi}{2};$$

donc

$$\text{dérivée arc}\cos x + \text{dérivée arc}\sin x = 0.$$

La dérivée de arc cos x est donc $= -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$

Dérivée de arc tang x. — Posons

$$y = \text{arc tang}\, x, \quad \text{d'où} \quad x = \text{tang}\, y;$$

en prenant les dérivées des deux membres, on a

$$1 = \frac{y'}{\cos^2 y} \quad \text{ou} \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+\text{tang}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\cdot$$

Nous avons admis que les dérivées de arc sin x, arc tang x existaient; on peut le prouver ainsi : en posant $y = \text{arc}\sin x$, on a $x = \sin y$, et, $\sin y$ ayant une dérivée, $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ a une limite : donc $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite aussi, qui est l'inverse de la première; car à tout accroissement de x correspond un et un seul accroissement de y, et *vice versa*.

VI. — Théorème de Rolle (¹).

Lorsque la fonction $f(x)$ est finie et continue entre les limites a et b de sa variable, et qu'elle a une dérivée $f'(x)$ toujours unique et finie dans cet intervalle, cette dérivée passe par zéro pour une valeur c de x comprise entre a et b si l'on a $f(a) = 0$, $f(b) = 0$.

En effet, la fonction $f(x)$ s'annulant pour $x = 0$, $x = b$, si nous supposons $a < b$, nous pourrons faire trois hypothèses : 1° ou bien $f(x)$ reste nul : alors $f'(x) = 0$ et le théorème est démontré; 2° ou bien $f(x)$ cesse d'être nul quand x croît à partir de a, et croît avec x; mais, $f(x)$ devenant de nouveau nul pour $x = b$, il faut que $f(x)$ décroisse :

(¹) Ce théorème a été énoncé pour la première fois, sous cette forme précise, par M. O. Bonnet, mais on peut en faire remonter l'origine à Rolle.

il passe donc par un maximum au moins pour une valeur c de x ; 3° ou bien $f(x)$, cessant de s'annuler pour des valeurs de x supérieures à a, décroît et devient négatif; mais, comme il doit s'annuler pour $x=b$, il faut qu'il passe par un minimum au moins, pour une valeur de x comprise entre a et b.

Ainsi $f(x)$ doit passer par un maximum ou par un minimum pour une valeur c de x telle que $a<c<b$. Le caractère commun au maximum et au minimum est que, pour h très petit,

$$f(c+h)-f(c) \quad \text{et} \quad f(c-h)-f(c)$$

soient de mêmes signes : donc

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$$

sont de signes contraires; or, ces deux expressions ayant par hypothèse la même limite $f'(c)$, qui est unique et finie, il faut que cette limite soit zéro : donc

$$f'(c)=0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire I. — Si l'on a $f(a)=0$, $f(b)=0$, $f(c)=0$, $a<b<c$, si la fonction f et sa dérivée sont continues quand x varie de a à c et si $f''(x)$ existe et est bien déterminé dans cet intervalle, on aura

$$f''(d)=0,$$

d désignant un nombre compris entre a et c; de même, si l'on a $f(a)=0$, $f(b)=0$, $f(c)=0$, $f(d)=0$, $a<b<c<d$, si $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ sont finis et continus entre les limites a et d, on aura

$$f'''(e)=0,$$

e' étant compris entre a et c; et ainsi de suite.

En effet, supposons $f(a)=0$, $f(b)=0$, $f(c)=0$; en appelant a' et b' des quantités convenablement choisies entre a et b et entre b et c, on aura, par le théorème de Rolle,

$$f'(a')=0, \quad f'(b')=0,$$

et par suite, encore, en vertu du théorème de Rolle,

$$f''(c')=0,$$

c' désignant un nombre compris entre a' et b' ou, ce qui est la même chose, entre a et c, etc....

C. Q. F. D.

Corollaire II. — Supposons que, $f(x)$ restant continu, ainsi que ses n premières dérivées, quand x varie entre x_0 et X, la $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée existe et reste finie et bien déterminée. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, x des nombres compris entre ces limites, ξ une moyenne entre ces nombres ; on aura, si $f(x)$ s'annule pour $x = a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$,

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n+1})\frac{f^{n+1}(\xi)}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

En effet, posons

$$(1) \qquad f(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_{n+1})\Theta(x);$$

la fonction de z

$$f(z) - (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n+1})\Theta(x)$$

s'annulera pour $z = a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ et $z = x$; donc sa dérivée $(n+1^{\text{ième}})$ s'annulera pour une valeur ξ de z comprise entre la plus grande et la plus petite des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ et x ; or cette dérivée est

$$f^{n+1}(z) - 1.2.3\ldots(n+1)\Theta(x).$$

On a donc

$$f^{n+1}(\xi) - 1.2.3\ldots(n+1)\Theta(x) = 0,$$

d'où

$$\Theta(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

Portant cette valeur de $\Theta(x)$ dans la formule (1), on a précisément la formule qu'il fallait établir.

VII. — Formule de Taylor.

Nous allons maintenant établir une formule qui est, on peut le dire, la pierre fondamentale sur laquelle est édifié tout le Calcul différentiel et intégral ; cette formule, qui porte le nom

de *formule de Taylor*, a été l'objet de travaux nombreux : elle a été successivement perfectionnée par d'illustres géomètres, tels que d'Alembert, Lagrange, Cauchy.

La démonstration que nous allons en donner est due en principe à M. Hommersham-Cox ; elle a été simplifiée par M. Rouché, qui a combiné la démonstration de M. Hommersham-Cox avec une démonstration antérieure de Cauchy ; enfin le théorème de Rolle, tel que l'a exposé M. Bonnet, est venu apporter à la démonstration de M. Rouché une perfection telle qu'il est peu probable que l'on arrive à rien de plus net et de plus précis dans la suite.

Lorsque la fonction $f(x)$ est entière et de degré $n-1$, on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}f^{n-1}(x).$$

Il est naturel de poser, quand f est quelconque,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}f^{n-1}(x) + \mathrm{R},$$

et de chercher une expression simple de R qui satisfasse à cette équation. R existe, car R n'est autre chose que

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \dots - \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{n-1}(x);$$

il faut toutefois que $f'(x), \dots, f^{n-1}(x)$ existent.

Nous supposerons que, z variant de x à $x+h$, la fonction $f(z)$ ait des dérivées $f'(z), \dots, f^n(z)$; nous supposerons seulement que $f^n(x)$ existe entre les limites en question : alors $f^{n-1}(z)$, $f^{n-2}(z)$, $\dots$, $f'(z)$, $f(z)$ seront continus. Posant, ce qui est permis, $\mathrm{R} = \mathrm{P}h^i$, i désignant un entier positif, nous aurons

$$(1)\quad f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \dots - \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}f^{n-1}(x) - \mathrm{P}h^i = 0.$$

Faisons alors

$$x+h = \mathrm{X}, \quad h = \mathrm{X} - x,$$

nous pourrons écrire, au lieu de (1),

$$(2)\qquad \begin{aligned} f(\mathrm{X})-f(x)-\frac{\mathrm{X}-x}{1}f'(x)-\ldots\\ -\frac{(\mathrm{X}-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(x)-\mathrm{P}(\mathrm{X}-x)^{i}=0.\end{aligned}$$

Maintenant considérons la fonction de z

$$\begin{aligned} f(\mathrm{X})-f(z)-\frac{\mathrm{X}-z}{1}f'(z)-\ldots\\ -\frac{(\mathrm{X}-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(z)-\mathrm{P}(\mathrm{X}-z)^{i},\end{aligned}$$

dans laquelle P désigne toujours la fonction de x et h ou de x et X définie par l'équation (2); cette fonction de z s'annule pour $z=\mathrm{X}$; évidemment elle s'annule aussi, en vertu de (2), pour $z=x$. Comme elle a une dérivée, puisque $f^{n-1}(z)$ a une dérivée, par hypothèse, quand z varie de z à $x+h=\mathrm{X}$, cette dérivée s'annulera pour une valeur de z comprise entre x et $x+h$; or cette dérivée est, comme il est facile de s'en assurer,

$$\frac{(\mathrm{X}-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{n}(z)-\mathrm{P}i(\mathrm{X}-z)^{i-1}.$$

En désignant par $x+\theta h$, θ étant compris entre 0 et 1, la valeur de z pour laquelle cette dérivée s'annule, on aura

$$\frac{(\mathrm{X}-\overline{x+\theta h})^{n-1}f^{n}(x+\theta h)}{1.2.3\ldots(n-1)}-\mathrm{P}i(\mathrm{X}-\overline{x+\theta h})^{i-1}=0,$$

en remarquant que $\mathrm{X}=x+h$; on tire de là

$$\mathrm{P}=\frac{(1-\theta)^{n-i}h^{n-i}f^{n}(x+\theta h)}{i.1.2.3\ldots(n-1)},$$

et, en portant cette valeur de P dans la formule (1), on a finalement

$$\begin{aligned} f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{n-1}(x)\\ +\frac{h^{n}(1-\theta)^{n-i}}{i.1.2.3\ldots(n-1)}f^{n}(x+\theta h).\end{aligned}$$

Cette formule a été démontrée pour la première fois sous cette forme par MM. Schlömilch et Roche. Le dernier terme est ce que l'on appelle le *reste*; si l'on fait $i = 1$ et $i = n$, on a les deux formules suivantes, dont la première est due à Cauchy; la seconde, qui est la plus utile, est due à Lagrange :

$$(1)\quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \dfrac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) \\ \qquad\qquad + \dfrac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^n(x+\theta h), \end{cases}$$

$$(1)\quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \dfrac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) \\ \qquad\qquad + \dfrac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x+\theta h). \end{cases}$$

VIII. Quelques théorèmes déduits de la formule de Taylor

La formule de Taylor, comme nous le verrons, est fondamentale en Analyse; nous allons d'abord en déduire le théorème de Rolle. Si l'on fait, dans cette formule,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x+\theta h),$$

$n = 1$, elle devient

$$(1)\qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

Sous cette forme, elle est fréquemment employée; elle montre bien que, si $f(x+h)$ et $f(x)$ sont nuls, $f'(x+\theta h)$ est nul; donc, quand une fonction s'annule pour deux valeurs de sa variable, en restant continue dans l'intervalle compris, sa dérivée s'annule pour la valeur intermédiaire $x + \theta h$.

Mais cette remarque ne constitue évidemment pas une démonstration du théorème de Rolle ou plutôt de M. O. Bonnet, sur lequel nous nous sommes appuyé pour établir le théorème de Taylor : elle a pour but seulement de montrer que la formule (1) est l'expression même, sous une forme condensée, du théorème de M. O. Bonnet.

Théorème. — *Si une fonction continue reste constante entre les limites x_0 et X de sa variable, sa dérivée est nulle ; réciproquement, si la dérivée d'une fonction reste nulle entre les limites x_0 et X, cette fonction reste constante dans l'intervalle en question.*

Si, en effet, une fonction est constante, sa dérivée, comme l'on sait, est nulle ; il reste à démontrer la réciproque. Soient donc x et $x+h$ deux valeurs comprises entre x_0 et X ; on aura

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

Or, $f'(x)$ étant nul quand x varie de x_0 à X, $f'(x+\theta h)$ sera nul, car $x+\theta h$ est compris entre x et $x+h$ et, par suite, entre x_0 et X. On aura donc

$$f(x+h) = f(x).$$

La formule trouvée ayant lieu, quels que soient x et h, pourvu que x et $x+h$ soient compris entre x_0 et X, il faut en conclure que $f(x)$, dans cet intervalle, reste constant.

C. Q. F. D.

On déduit de là cet autre théorème, très important :

Théorème. — *Deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, ayant même dérivée et restant continues, ne peuvent (tant qu'elles restent continues) différer l'une de l'autre que par une constante.*

En effet, si l'on a

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = 0,$$

la fonction $\varphi(x) - \psi(x)$, dont la dérivée est $\varphi'(x) - \psi'(x)$ ou zéro, est constante : ainsi

$$\varphi(x) - \psi(x) = \text{const.}$$

ou

$$\varphi(x) = \psi(x) + \text{const.},$$

et il résulte de là que, si l'on connaît une solution $\varphi(x)$ de l'équation

$$y' = F(x),$$

toutes les autres seront de la forme

$$y = \varphi(x) + \text{const.}$$

Théorème. — *Une fonction est croissante ou décroissante pour une valeur x de sa variable, suivant que pour cette valeur sa dérivée est positive ou négative.*

En effet, la formule

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)$$

montre que le signe de $f(x+h)-f(x)$ est celui de $f'(x+\theta h)$ quand h est positif; si donc on observe qu'une fonction $f(x)$ est croissante quand, pour des valeurs de h suffisamment petites, on a

$$f(x+h)-f(x)>0,$$

cette inégalité continuant à être satisfaite pour des valeurs de h moindres, on voit que $f(x)$ sera croissant si $f'(x+\theta h)$ est positif; mais $f'(x+\theta h)$ est peu différent de $f'(x)$; donc, si $f'(x)$ est positif, il en sera de même de $f'(x+\theta h)$, et $f(x)$ sera croissant.

On verrait de même que $f(x)$ est décroissant pour les valeurs de x qui rendent $f'(x)$ négatif.

La démonstration précédente suppose $f'(x)$ continu, mais elle démontre que, dans ce cas, si $f'(x)=0$, la fonction est croissante ou décroissante suivant que $f'(\varepsilon+x)$, ε étant très petit ($\varepsilon=\theta h$), est positif ou négatif.

Le théorème précédent est encore vrai quand $f'(x)$ est discontinu, mais on ne peut plus affirmer que, si $f'(x)=0$, $f(x)$ sera croissant ou décroissant suivant que $f'(x+\varepsilon)$ sera positif ou négatif. Voici comment on peut établir le théorème quand $f'(x)$ est discontinu : on a

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon],$$

ε étant un infiniment petit; cela résulte de la définition même de la dérivée. Si $f'(x)$ n'est pas nul, on peut prendre ε assez petit pour que $f'(x)+\varepsilon$ soit de même signe que $f'(x)$, et alors on voit que $f(x+h)-f(x)$ a le signe de $f'(x)$ pour des valeurs positives de h : ce qui démontre le théorème.

IX. — Dérivée d'une fonction composée.

Si u, v, w, ... sont des fonctions de x, toute fonction telle que $f(u, v, w, \ldots)$ est dite une *fonction composée* de x. Cherchons la dérivée d'une pareille fonction.

Donnons à x l'accroissement Δx, supposons que u, v, w aient des dérivées; ces fonctions prendront des accroissements Δu, Δv, Δw et la dérivée de f sera la limite de

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta x}.$$

Or on peut écrire cette formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} = {} & \frac{1}{\Delta x}\left[f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)\right] \\ & + \frac{1}{\Delta x}\left[f(u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w+\Delta w)\right] \\ & + \frac{1}{\Delta x}\left[f(u, v, w+\Delta w) - f(u, v, w)\right]. \end{aligned}\right.$$

Comme $f(x)$ désigne une fonction possédant une dérivée, on a (p. 78)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

ou

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h).$$

Si l'on suppose $h = \Delta x$, on aura

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x+\theta\Delta x),$$

θ désignant un nombre compris entre 0 et 1. Remplaçons dans cette formule x par u et $f(x)$ par $f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)$; nous aurons

$$\begin{aligned} & f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v+\Delta v, w+\Delta w) \\ & \quad = \Delta u f'_u(u+\theta\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w), \end{aligned}$$

pourvu que, laissant v et w constants, $f(u, v, w)$ ait une dérivée f'_u relative à u. On aurait de même, en appelant θ' et θ''

des nombres compris entre o et 1,

$$\begin{aligned} f(u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v, w+\Delta w) \\ = \Delta v f'_v(u, v+\theta'\Delta v, w+\Delta w), \end{aligned}$$

$$f(u, v, w+\Delta w) - f(u, v, w) = \Delta w f'_w(u, v, w+\theta''\Delta w),$$

f'_v et f'_w désignant les dérivées de f relatives à v et w que l'on suppose exister. La formule (1) devient alors

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} f'_u(u+\theta\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) \\ + \frac{\Delta v}{\Delta x} f'_v(u, v+\theta'\Delta v, w+\Delta w) \\ + \frac{\Delta w}{\Delta x} f'_w(u, v, w+\theta''\Delta w). \end{aligned}$$

Si donc f'_u, f'_v, f'_w sont continus par rapport à u, v, w, on aura, en faisant $\Delta x = 0$,

$$\lim \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ ou dérivée de } f = u' f'_u(u,v,w) + v' f'_v(u,v,w) + w' f'_w(u,v,w).$$

C'est dans cette formule que consiste le théorème des fonctions composées. On en conclut que *la dérivée d'une fonction composée est égale à la somme des résultats obtenus en multipliant les dérivées de cette fonction, relatives à chaque fonction composante, par la dérivée de cette fonction composante.*

Application. — Cherchons la dérivée de u^v, u et v désignant des fonctions de x. Cette fonction est composée de u et v : la dérivée relative à u est vu^{v-1}, celle relative à v est $u^v \log u$; la dérivée cherchée est donc

$$vu^{v-1}u' + u^v \log u v'.$$

En particulier, la dérivée de x^x est

$$xx^{x-1} + x^x \log x = x^x(1 + \log x).$$

La dérivée de $x^{(x^x)}$ est

$$x^x x^{x^x-1} + x^{x^x} \log x (1 + \log x) x^x.$$

La dérivée de $x^{\log x}$ est

$$\log x \, x^{\log x - 1} + x^{\log x - 1} \log x = 2x^{\log x - 1} \log x.$$

X. — Sur quelques fonctions dont on peut calculer la dérivée d'ordre n en fonction du nombre n.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de x^m est $m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n}$, celle de a^x est $a^x(\log a)^n$, celle de e^{ax} est $a^n e^{ax}$, celle de $\log x$ est $\frac{(1.2\dots n-1)}{x^n}(-1)^{n-1}$.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de $u+v-w+\dots$ est $u^{(n)}+v^{(n)}-w^{(n)}+\dots$.

Voici maintenant une formule due à Leibnitz et qui permet de former la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit : si l'on différentie $y=uv$ plusieurs fois de suite, on trouve

$$\begin{aligned} y' &= uv' + vu', \\ y'' &= uv'' + 2u'v' + u''v, \\ y''' &= uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

ce qui fait soupçonner la formule générale

$$(1)\qquad y^{(n)} = uv^{(n)} + C_n^1 u'v^{(n-1)} + C_n^2 u''v^{(n-2)} + \dots + u^{(n)}v,$$

$C_n^1, C_n^2, \dots$ désignant les nombres de combinaisons de n objets pris 1 à 1, 2 à 2, ... ; en sorte que l'on a, symboliquement,

$$y^{(n)} = (u+v)^n,$$

les exposants de u et v devant être changés en indices de dérivations après le développement de $(u+v)^n$ par la formule du binôme. Pour démontrer cette formule, il suffit de prouver que, si elle a lieu pour la dérivée $n^{\text{ième}}$, elle a encore lieu pour la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$; car elle est vraie pour les trois premières dérivées, comme on le vérifie directement.

Admettant la formule (1), si nous prenons la dérivée des deux membres, nous trouvons

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} = uv^{(n+1)} &+ C_n^1 u'v^{(n)} + C_n^2 u''v^{(n-1)} + \dots \\ &+ \quad u'v^{(n)} + C_n^1 u''v^{(n-1)} + \dots; \end{aligned}$$

or, par la théorie des combinaisons, on a

$$C_n^1 + 1 = C_{n+1}^1, \quad C_n^1 + C_n^2 = C_{n+1}^2, \quad \dots;$$

donc

$$y^{(n+1)} = uv^{(n+1)} + C_{n+1}^1 u' v^{(n)} + C_{n+1}^2 u'' v^{(n-1)} + \ldots,$$

ce qui démontre la formule de Leibnitz.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de uvw est, symboliquement, $(u+v+w)^{(n)}$, et cette formule se déduit de celle de Leibnitz comme le développement de $(a+b+c)^n$ se déduit de $(a+b)^n$, ...

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\frac{u}{v}$ se calcule comme celle d'un produit $u\frac{1}{v}$, quand on sait trouver les dérivées de $\frac{1}{v}$, et nous verrons tout à l'heure comment on peut parfois trouver la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{v}$.

X. — Dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction.

Considérons une fonction de fonction $z = \varphi(u)$ de x, u désignant une fonction de x, et proposons-nous de calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\varphi(u)$, que nous appellerons $z^{(n)}$. On a

$$z' = \varphi'(u)u',$$
$$z'' = \varphi''(u)u'^2 + \varphi'(u)u'',$$
$$z''' = \varphi'''(u)u'^3 + \varphi''(u)3u'u'' + \varphi'(u)u''',$$

et il est évident que l'on a

$$(1)\quad z^n = A_n\varphi^{(n)}(u) + A_{n-1}\varphi^{(n-1)}(u) + \ldots + A_2\varphi''(u) + A_1\varphi'(u),$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ désignant des quantités qui ne dépendent que de la fonction u et de ses dérivées. Pour déterminer ces coefficients, on peut supposer que l'on donne à la fonction φ des formes particulières; en faisant successivement $\varphi(u) = u, u^2, u^3, \ldots, u^n$, on a

$$u^{(n)} = A_1,$$
$$(u^2)^{(n)} = A_1 2u + A_2.2.1,$$
$$(u^3)^{(n)} = A_1 3u^2 + A_2.3.2u + A_3 3.2.1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(u^n)^{(n)} = A_1 nu^{n-1} + A_2 n(n-1)u^{n-2} + \ldots + A_n n(n-1)\ldots2.1.$$

Si l'on pose alors $A_i = \frac{B_i}{1.2.3\ldots i}$, on obtient

$$u^{(n)} = B_1,$$
$$(u^2)^{(n)} = 2B_1 u + B_2,$$
$$(u^3)^{(n)} = 3B_1 u^2 + 3B_2 u + B_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$
$$(u^n)^{(n)} = \frac{n}{1} B_1 u^n + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2} B_2 u^{n-1} + \ldots + B_n.$$

Pour résoudre ces équations, écrivons-les ainsi :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} u^{(n)} &= B_1,\\ (u^2)^{(n)} &= B_2 + C_2^1 B_1 u,\\ (u^3)^{(n)} &= B_3 + C_3^1 B_2 u + C_3^2 B_1 u^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,\\ (u^i)^{(n)} &= B_i + C_i^1 B_{i-1} u + \ldots + C_i^{i-1} B_1 u^{i-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{aligned}\right.$$

or nous avons

$$C_i^1 - C_i^2 C_2^1 + C_i^3 C_3^1 - \ldots \pm C_i^i C_i^1 = 0,$$
$$C_i^2 - C_i^3 C_3^2 + C_i^4 C_4^2 - \ldots \pm C_i^i C_i^2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_i^j - C_i^{j+1} C_{j+1}^j + C_i^{j+2} C_{j+2}^j - \ldots \pm C_i^i C_i^j = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots :$$

pour le prouver, observons que la $j^{\text{ième}}$ formule a pour premier membre

$$\frac{i(i-1)\ldots(i-j+1)}{1.2.3\ldots j} - \frac{i(i-1)\ldots(i-j)}{1.2\ldots(j+1)}\,\frac{j+1}{1} + \frac{i(i-1)\ldots(i-j-1)}{1.2\ldots(j+2)}\,\frac{(j+1)(j+2)}{1.2} - \ldots$$

ou bien

$$\frac{i(i-1)\ldots(i-j+1)}{1.2.3\ldots j}\left[1 - \frac{i-j}{1} + \frac{(i-j)(i-j-1)}{1.2} - \ldots\right];$$

la partie entre crochets est $(1-1)^{i-j}$; l'équation en question est donc bien vérifiée. Les formules (2), multipliées respectivement par C_i^1, $-\frac{1}{u}C_i^2$, $\frac{1}{u^2}C_i^3$, ..., et ajoutées, donnent alors

$$\frac{1}{u^{i-1}} B_i = (u^i)^{(n)} \frac{1}{u^{i-1}} - C_i^1 (u^{i-1})^{(n)} \frac{1}{u^{i-2}} + C_i^2 (u^{i-2}) \frac{1}{u^{i-3}} - \ldots;$$

il reste à remplacer A_i par $\frac{B_i}{1.2\ldots i}$ dans (1); mais on peut écrire $\frac{B_i}{u^i}$ sous une autre forme, savoir

$$D_u^n\left(\frac{u^i}{\alpha^i} - C_i^1\frac{u^{i-1}}{\alpha^{i-1}} + \ldots\right)_{\alpha=u},$$

le signe $D_u^{(n)}$ voulant dire dérivée d'ordre n par rapport à u, et l'indice $u=\alpha$ indiquant que l'on doit faire $\alpha = u$ dans le résultat. On a donc

$$\frac{1}{u^i}B_i = D_u^n\left(\frac{u}{\alpha}-1\right)^i_{\alpha=u}$$

et, par suite,

$$D_x^n\varphi(u) = \frac{u^n\varphi^n(u)}{1.2.3\ldots n}D_u^n\left(\frac{u}{\alpha}-1\right)^n_{\alpha=u}$$
$$+\frac{u^{n-1}\varphi^{n-1}(u)}{1.2.3\ldots(n-1)}D_u^{n-1}\left(\frac{u}{\alpha}-1\right)^{n-1}_{\alpha=u}+\ldots.$$

Telle est la formule qui donne la dérivée d'une fonction de fonction.

Si l'on fait, par exemple, $u=e^x$, on a

$$D^n\varphi(e^x) = e^{nx}\frac{\varphi^n(e^x)}{1.2.3\ldots n}D_u^n\left(\frac{u}{\alpha}-1\right)^n_{\alpha=u}+\ldots.$$

Or

$$D^i\left(\frac{u}{\alpha}-1\right)^i = D^i\left(\frac{u^i}{\alpha^i} - C_i^1\frac{u^{i-1}}{\alpha^{i-1}}+\ldots\right)$$

et, si $u=e^x$,

$$D^i\left(\frac{u}{\alpha}-1\right)^i = \frac{i^i}{\alpha^i}e^{ix} - C_i^1(i-1)^i\frac{e^{(i-1)x}}{\alpha^{i-1}}+\ldots.$$

Pour $\alpha = u$, on a simplement

$$D^i\left(\frac{u}{\alpha}-1\right)^i_{u=\alpha} = i^i - C_i^1(i-1)^i + C_i^2(i-2)^i - \ldots;$$

de sorte que

$$D^n\varphi(e^x) = \frac{e^{nx}\varphi^n(e^x)}{1.2.3\ldots n}\left[n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n - \ldots\right]$$
$$+\frac{e^{(n-1)x}\varphi^{n-1}(e^x)}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[(n-1)^{n-1} - C_{n-1}^1(n-2)^{n-1}+\ldots\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette formule est de Herschel.

XI. — Dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction rationnelle.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un polynôme est la somme des dérivées $n^{\text{ièmes}}$, que l'on sait prendre, de chacun de ses termes. Pour prendre la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fraction rationnelle, on peut la décomposer en éléments simples, de la forme $\frac{A}{(x-a)^m}$ ou $A(x-a)^m$, dont on connaît les dérivées $n^{\text{ièmes}}$.

Mais on peut aussi procéder autrement. Soit une fraction rationnelle $y=\frac{u}{v}$, dans laquelle u et v désignent des polynômes entiers en x : on aura

$$vy = u.$$

Si l'on prend n fois de suite les dérivées des deux membres, au moyen de la formule de Leibnitz, on aura

$$v^n y + \frac{n}{1} v^{n-1} y' + \ldots + v y^n = u^n ;$$

si, dans cette formule, on fait $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, on obtiendra n équations du premier degré, à n inconnues $y', y'', \ldots, y^n$, que l'on pourra résoudre et qui feront connaître y^n sous forme d'un quotient de deux déterminants.

Un artifice analogue permet de calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une expression de la forme $y=\sqrt{\frac{1}{v}}$, où v désigne un polynôme entier. En effet, on en tire

$$vy^2 = 1$$

et, en différentiant,

$$v'y^2 + 2yy'v = 0$$

ou

$$v'y + 2y'v = 0.$$

En différentiant n fois, par la formule de Leibnitz, puis en faisant $n = 1, 2, \ldots, n$, on a des équations du premier degré pour calculer $y', y'', \ldots, y^n$.

XII. — Formule de Maclaurin et ses applications.

Si, dans la formule de Taylor,

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^n(x)+\mathrm{R},$$

où l'on a

$$\mathrm{R}=\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{n+1}(x+\theta h)$$

ou

$$\mathrm{R}=\frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{1.2.3\ldots n}f^{n+1}(x+\theta h),$$

on remplace x par zéro et h par x, on obtient la formule dite de Maclaurin

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(0)+\mathrm{R},$$

$$\mathrm{R}=\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{n+1}(\theta x),$$

$$\mathrm{R}=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\ldots n}f^{n+1}(\theta x).$$

Cette formule peut servir à développer quelques fonctions en série; mais, malheureusement, la discussion du reste, qu'il est nécessaire de faire, est très difficile, si ce n'est pour des fonctions très simples, dont le développement est toujours plus facile à obtenir par d'autres moyens qui ont l'avantage de démontrer les résultats pour les valeurs imaginaires de la variable. Nous allons appliquer la formule de Maclaurin aux fonctions $l(1+x)$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, mais il ne faudra voir dans nos résultats que des exercices, ou plutôt des vérifications de la formule de Taylor, et non de véritables démonstrations.

Développement de e^x, $\sin x$, $\cos x$. — Si, dans la formule

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^n(0)$$
$$+\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f^{n+1}(\theta x),$$

on remplace $f(x)$ successivement par e^x, $\sin x$, $\cos x$, on trouve

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{e^{\theta x}\, x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{\cos\theta x . x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{\cos\theta x . x^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}.$$

Dans chacune de ces formules, le dernier terme ou, si l'on veut, le reste, tend vers zéro quand n croît indéfiniment; pour $n = \infty$, on a alors les séries

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{2n!} \mp \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mp \ldots$$

Développement de $(1+x)^a$. — Le développement de $(1+x)^a$ est déjà plus difficile à obtenir. Si l'on fait

$$f(x) = (1+x)^a$$

dans la formule

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^n(0) + \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n f^{n+1}(\theta x)}{1.2.3\ldots n},$$

comme on a

$$f(x) = (1+x)^a \ldots f^n(x) = (1+x)^{a-n} a(a-1)\ldots(a-n+1),$$

il en résulte

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1} x + \frac{a(a-1)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n + \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\ldots n}(1+\theta x)^{a-n-1} a(a-1)\ldots(a-n).$$

Nous allons prouver que, si x est compris entre -1 et $+1$, le reste tend vers zéro, en sorte que, pour ces valeurs, on aura

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1} x + \frac{a(a-1)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n + \ldots$$

Pour les autres valeurs de x, la série qui forme le second membre est divergente; il n'y a donc pas lieu de discuter pour ce cas la forme du reste. Ce reste peut s'écrire, au signe près,

$$a(1-a)\left(1-\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{n}\right)x(1+\theta x)^{a-1}\left(\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right)^n.$$

Si l'on néglige le facteur fini $ax(1+\theta x)^{a-1}$, le produit des autres facteurs sera

$$\left[(1-a)\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right]\cdots\left[\left(1-\frac{a}{n}\right)\frac{x-\theta x}{1+\theta x}\right].$$

Si x est positif, chaque facteur entre crochets finit par devenir notablement moindre que 1; si x est négatif, il en est de même, car, en changeant x en $-x'$, $\frac{x-\theta x}{1+\theta x}$ devient $-\frac{x'-\theta x'}{1-\theta x'}$, quantité encore notablement moindre que 1. Le reste tend donc bien vers zéro.

Développement de $\log(1+x)$. — Si l'on suppose x compris entre -1 et $+1$, on trouve, en appliquant la même formule que tout à l'heure,

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots.$$

XIII. — Développement de arc tang x.

Les applications que nous ferons de la formule de Taylor au développement en séries s'arrêteront à la fonction arc tang x. Les applications qui précèdent ont été faites pour nous conformer à un usage reçu; celle qui va suivre a pour but de faire connaître un artifice de calcul. Soit $y=\text{tang}\,x$.

On a

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{-1}}-\frac{1}{x+\sqrt{-1}}\right);$$

si l'on différentie n fois, on a

$$y^{(n+1)}=\frac{(-1)^n}{2\sqrt{-1}}1.2.3\ldots n\left[\frac{1}{(x-\sqrt{-1})^{n+1}}-\frac{1}{(x+\sqrt{-1})^{n+1}}\right].$$

Posons

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sin\varphi;$$

nous aurons

$$y^{(n+1)} = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{-1}}\, n!\, \frac{(x+\sqrt{-1})^{n+1} - (x-\sqrt{-1})^{n+1}}{(x^2+1)^{n+1}}$$

ou

$$y^{(n+1)} = (-1)^n n! \frac{(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{n+1} - (\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)^{n+1}}{2\sqrt{-1}} \sin^{n+1}\varphi$$

ou, par la formule de Moivre,

$$y^{(n+1)} = (-1)^n n! \sin(n+1)\varphi \sin^{n+1}\varphi;$$

donc, pour $x = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$y = 0,\quad y' = 1,\quad y'' = 0,\quad y''' = -1.2,\quad y^{\text{IV}} = 0,\quad y^{\text{V}} = 1.2.3.4,\quad \ldots$$

et, par suite, en appliquant la première forme de la formule de Maclaurin, et en appelant θ un nombre moindre que 1,

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \mp x^{2n+1}\frac{\theta}{2n+1}.$$

Quand x est compris entre -1 et $+1$, le reste tend manifestement vers zéro; quand x est plus grand que 1 en valeur absolue, il n'y a pas lieu de faire une discussion, la série qui constitue le second membre étant divergente: on a donc, tant que x reste compris entre -1 et $+1$,

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots.$$

XIV. — De la formule de Taylor considérée comme formule d'approximation.

La formule de Taylor n'a jamais servi à découvrir un nouveau développement en série; elle est impuissante à donner tous ceux qui sont déjà connus, mais elle a une grande

importance analytique, comme on le verra dans la suite; nous nous bornerons ici à montrer comment on peut l'utiliser dans les calculs d'approximation.

Supposons que l'on veuille résoudre l'équation

$$f(x)=0,$$

et que l'on en connaisse une solution approchée a. En posant $x=a+h$, on aura

$$f(a+h)=0$$

ou bien

$$f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a+\theta h)=0.$$

On déduit de là

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{h}{2}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}.$$

En prenant $h=-\frac{f(a)}{f'(a)}$, l'erreur commise est

$$\frac{h}{2}\frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)};$$

on pourra l'évaluer en remplaçant h par une valeur supérieure à sa véritable valeur, valeur supérieure que l'on connaît en général, car on a le plus souvent deux valeurs approchées de x, et ensuite en remplaçant $f''(a+\theta h)$ par le maximum de $f''(x)$ quand on fait varier x entre les deux valeurs de la racine, l'une par excès, l'autre par défaut.

Voici une autre application de la formule de Taylor. Je suppose que l'on ait construit une Table de la fonction $f(x)$, une Table de logarithmes par exemple, donnant les valeurs de $f(1), f(2), \ldots, f(x), f(x+1), \ldots$. Si, x étant entier, on veut avoir $f(x+h)$, h désignant un nombre inférieur à 1, on pose

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x+1)-f(x)}=\frac{h}{1},$$

et l'on en conclut

$$f(x+h)=f(x)+h[f(x+1)-f(x)]$$

ou, en appelant Δ la *différence tabulaire*,

$$f(x+h) = f(x) + h\Delta;$$

on commet ainsi une erreur qu'il est facile d'évaluer.

En effet, on a exactement

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h),$$
$$f(x+1) - f(x) = \Delta = f'(x+\theta'),$$

θ et θ' étant tous deux compris entre 0 et 1.

On a donc posé

$$f(x+h) = f(x) + h\Delta = f(x) + hf'(x+\theta'),$$

au lieu de

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h);$$

par suite, l'erreur est

$$h[f'(x+\theta h) - f'(x+\theta')].$$

Application. — Supposons qu'il s'agisse d'une Table de logarithmes, l'erreur commise pour calculer $\log(x+h)$, quand on se donne x, est

$$\log e h\left(\frac{1}{x+\theta h} - \frac{1}{x+\theta'}\right)$$

ou

$$\frac{h\log e}{(x+\theta h)(x+\theta')}(\theta' - \theta h);$$

$\theta' - \theta h$ est moindre que l'unité : donc l'erreur sera moindre que

$$\frac{h\log e}{x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\log e}{x^2}.$$

Pour un nombre de cinq chiffres, elle n'atteint pas le dixième.

Autre application. — S'il s'agit d'une Table de logarithmes-sinus, l'erreur commise dans le calcul de $\log\sin(x+h)$, l'unité étant l'arc de 10 secondes, sera

$$h\log e[\cot(x+\theta h) - \cot h(x+\theta')]$$

ou

$$\frac{h \log e \sin(\theta' - \theta h)}{\cos(x + \theta h)\cos(x + \theta')};$$

elle est moindre que

$$\frac{\log e}{\cos^2(x + 10'')}(\text{arc } 10'')^2,$$

c'est-à-dire tout à fait négligeable pour des arcs moindres que 88°.

EXERCICES ET NOTES.

1. Le lecteur peut prendre une fonction analytique au hasard et en chercher la dérivée. Pour contrôler le résultat, il suffit de donner à cette fonction une autre forme; en cherchant sa dérivée sous sa nouvelle forme, on doit trouver des résultats identiques. Par exemple, on a

$$e^{\cos x} = e^{\sqrt{1-\sin^2 x}}, \quad \frac{x}{1 - x^2} = \frac{x^2}{x(1-x)(1+x)}, \quad \dots.$$

2. Trouver la dérivée de $\log x$, la dérivée seconde de $\log \log x$, la dérivée troisième de $\log \log \log x$, en général la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\log_i x$, en désignant $\log \log x$ par $\log_2 x$, $\log \log_2 x$ par $\log_3 x$, ...

3. Montrer que la dérivée de $F(x)$ pour $x = a$, ou $F'(x)$, est la limite de $\dfrac{F(x) - F(a)}{x - a}$ pour $x = a$.

4. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de arc sin x.

On observe que la première dérivée est

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad (1 - x)^{-\frac{1}{2}}(1 + x)^{-\frac{1}{2}};$$

en appliquant la règle de Leibnitz à ce produit, on a le résultat cherché.

5. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

6. Trouver la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\dfrac{1}{1 - x^2}$ en le mettant sous les deux formes $(1 - x)^{-1}(1 + x)^{-1}$ et $\frac{1}{2}[(1 - x)^{-1} + (1 + x)^{-1}]$; identifier les deux résultats.

7. Démontrer que l'équation

$$1+\left(\frac{m}{1}\right)^2 x+\left[\frac{m(m-1)}{1.2}\right]^2 x^2+\left[\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\right]^2 x^3+\ldots=0,$$

où m est entier, a toutes ses racines réelles.

8. Si, dans un certain intervalle, on a

$$F'(x)>f'(x),$$

peut-on quelquefois en conclure

$$F(x)>f(x)?$$

9. Toutes les dérivées de $e^{-\frac{1}{x^2}}$ sont nulles pour $x=0$; en conclure que cette fonction ne peut pas être développée suivant les puissances croissantes de x.

10. La fonction $x^2(e^x-e^{-x})$ croît-elle ou décroît-elle quand x croît à partir de zéro?

11. Si l'on différentie n fois de suite par la règle de Leibnitz les deux membres de l'identité suivante $x^{a+b}=x^a x^b$, on trouve la formule suivante, dite *binôme de Vandermonde :*

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)\\ =a(a-1)\ldots(a-n+1)\\ +C_n^1 a(a-1)\ldots(a-n+2)b\\ +C_n^2 a(a-1)\ldots(a-n+3)b(b-1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

C_n^i désignant le nombre des combinaisons de m objets pris i à i.

12. On a identiquement

$$x^{a+b+c+\ldots+l}=x^a x^b\ldots x^l.$$

En différentiant n fois de suite et en appliquant la règle de Leibnitz, on généralise la formule précédente de Vandermonde.

13. Appliquer la formule de Maclaurin au développement de l'arc $\sin x$, et dire entre quelles limites ce développement représentera la fonction arc $\sin x$.

14. On démontre en Trigonométrie que $\cos nx$, $\frac{\sin nx}{\sin x}$ sont des fonctions entières de $\cos x$ quand le nombre n est entier; on propose d'appliquer la formule de Maclaurin à la recherche des coefficients de ces polynômes.

15. Démontrer la formule

$$D^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin(n\arccos x).$$

(JACOBI.)

16. $$\frac{(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{1.3\ldots(2n-1)} D^n(x^2-1)^{n+\frac{1}{2}} = \cos(n\arccos x).$$ (JACOBI.)

17. Dans la formule de Taylor,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}f^n(x+\theta h),$$

la quantité θ est de la forme $\frac{1}{n+1}+\varepsilon$, ε désignant une quantité infiniment petite en même temps que h; mais cela suppose l'existence de la $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée de f. En supposant l'existence des dérivées suivantes de f, on propose de montrer que ε est de la forme $hA+h^2B+\ldots$; A, B, ... sont des fonctions que l'on propose de calculer. (On ne demande que les valeurs des premières quantités et non leur expression générale.)

18. On a

$$f(x+h) = f(x) + hf'\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

aux termes du troisième ordre près par rapport à h.

CHAPITRE IV.

DIFFÉRENCES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

I. — Différences des fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de x. Si nous donnons à x l'accroissement Δx, $f(x)$ prendra l'accroissement Δf, égal à $f(x+\Delta x)-f(x)$, auquel on donne le nom de *différence première* de $f(x)$. Cette différence première est une nouvelle fonction de x, et, si l'on y change x en $x+\Delta x$, elle subira un accroissement $\Delta\Delta f(x)$, que l'on représente aussi par $\Delta^2 f(x)$, et que l'on appelle la *différence seconde* de $f(x)$. La différence $\Delta\Delta^2 f(x)$ de $\Delta^2(x)$ s'appelle la *différence troisième* de $f(x)$ et se représente par $\Delta^3 f(x)$, et ainsi de suite.

Cherchons, par exemple, les différences successives de a^x; en posant $\Delta x = h$, nous aurons

$$\Delta a^x = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$
$$\Delta^2 a^x = (a^{x+h} - a^x)(a^h - 1) = a^x(a^h - 1)^2$$

et, en général,

$$\Delta^n a^x = a^x(a^h - 1)^n.$$

Les différences successives des autres fonctions sont plus difficiles à former. Considérons cependant la fonction Ax^m, où A est une constante; nous aurons

$$\Delta A x^m = A[(x+h)^m - x^m];$$

la formule du binôme donnera le résultat, qui d'ailleurs n'a rien d'intéressant. Nous ne formerons donc pas l'expression générale de $\Delta^n A x^m$, mais nous ferons une remarque importante au sujet de cette expression et, plus généralement, au

sujet de $\Delta^n F(x)$, en désignant par $F(x)$ un polynôme de degré m en x. Posons

$$F(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots;$$

nous aurons

$$\Delta F(x) = A(x+h)^m - Ax^m + B(x+h)^{m-1} - Bx^{m-1} + \ldots.$$

Si l'on développe chaque parenthèse par la formule du binôme, il est clair que l'on trouve un polynôme de degré $m-1$ et que le terme du degré le plus élevé dans ce polynôme est $Amx^{m-1}h$; donc

$$\Delta F(x) = Amx^{m-1}h + \ldots.$$

Si l'on prend la différence de $\Delta F(x)$, ou $\Delta^2 F(x)$, le terme de degré le plus élevé dans le résultat s'obtiendra en multipliant le terme de degré le plus élevé dans $\Delta F(x)$ par $m-1$ et h; on aura donc

$$\Delta^2 F(x) = Am(m-1)x^{m-2}h^2 + \ldots,$$
$$\Delta^3 F(x) = Am(m-1)(m-2)x^{m-3}h^3 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^n F(x) = Am(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}h^n + \ldots$$

et, en particulier, si $n=m$,

$$\Delta^m F(x) = Am(m-1)\ldots3.2.1\,h^m.$$

Ainsi la différence $m^{\text{ième}}$ d'une fonction entière de degré m est égale à une constante, et, par suite, les différences d'un ordre plus élevé sont nulles.

Quoique les formules suivantes soient peu employées, nous les signalerons, parce qu'elles peuvent avoir quelque utilité,

$$\Delta uv = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v,$$
$$\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v,$$
$$\Delta\frac{u}{v} = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on les retrouvera le plus souvent quand on en aura besoin, sans qu'il soit nécessaire de les retenir.

Parfois la variable x peut recevoir des accroissements $h, h', h'', \ldots$ successifs inégaux. Pour ne citer qu'un exemple, considérons la fonction a^x; nous aurons

$$\Delta a^x = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$
$$\Delta^2 a^x = a^{x+h'}(a^h - 1) - a^x(a^h - 1) = a^x(a^h - 1)(a^{h'} - 1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

II. — Formules servant à calculer $\Delta^n f$ en fonction de $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$, ..., et formules inverses.

Soit une fonction $f(x)$ quelconque. Posons

$$(1)\quad f(x) = f_0, \quad f(x+h) = f_1, \quad f(x+2h) = f_2, \quad \ldots, \quad f(x+nh) = f_n.$$

Nous aurons

$$(2)\qquad \Delta f_0 = f_1 - f_0, \quad \Delta f_1 = f_2 - f_1, \quad \Delta f_2 = f_3 - f_2, \quad \ldots;$$

nous obtiendrons ensuite

$$(3)\quad \Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0, \quad \Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1, \quad \Delta^2 f_2 = \Delta f_3 - \Delta f_2, \quad \ldots,$$

puis

$$(4)\qquad \Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0, \quad \ldots;$$

si, dans (3), on remplace Δf_1 et Δf_0 par leurs valeurs (2), on a

$$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0$$

et, de même,

$$\Delta^2 f_1 = f_3 - 2f_2 + f_1.$$

La formule (4), à l'aide de celle-ci, devient

$$\Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0.$$

Si l'on examine attentivement les formules donnant Δf_0, $\Delta^2 f_0$, $\Delta^3 f_0$, on ne tardera pas à soupçonner la formule

$$(5)\qquad \Delta^m f_0 = f_m - C_m^1 f_{m-1} + C_m^2 f_{m-2} - \ldots \pm f_0,$$

où C_m^1, C_m^2, ... représentent les coefficients du développe-

ment de $(a+x)^m$. Admettons la formule (5) pour toutes les valeurs entières de m inférieures à une certaine limite, et démontrons qu'elle subsiste en changeant m en $m+1$. Comme elle a lieu pour $m = 1, 2, 3$, elle sera générale. La formule (5), appliquée à la fonction $f_1(x) = f(x+h)$, donne

$$\Delta^m f_1 = f_{m+1} - C_m^1 f_m + C_m^2 f_{m-1} - \ldots \pm f_1,$$

et, en soustrayant (5) de cette nouvelle formule, on a

$$\Delta^m f_1 - \Delta^m f_0 = f_{m+1} - (C_m^1 + 1) f_m + (C_m^2 + C_m^1) f_{m-1} - \ldots \pm f_0,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules connues qui ont lieu entre les quantités C_m^n,

$$\Delta^{m+1} f_0 = f_{m+1} - C_{m+1}^1 f_m + C_{m+1}^2 f_{m-1} - \ldots \pm f_0;$$

cette formule n'est autre que (5), où m a été changé en $m+1$. La formule (5) est donc générale.

Corollaire. — Il est bon d'observer que la formule (5), que l'on peut écrire symboliquement

$$\Delta^m f = (f-1)^m,$$

en changeant les exposants de f en indices, aurait encore lieu si l'on avait

$$f_0 = f(x),\ f_1 = f(x+h),\ f_2 = f(x+h+h'),\ f_3 = f(x+h+h'+h''),\ \ldots,$$

c'est-à-dire si les accroissements successifs h, h', h'', ... donnés à x étaient inégaux.

On peut obtenir une formule inverse; en effet, on a, par les formules (2),

(6) $$f_1 = f_0 + \Delta f_0, \quad f_2 = f_1 + \Delta f_1, \quad \ldots$$

et, par les formules (3),

(7) $$\Delta f_1 = \Delta f_0 + \Delta^2 f_0, \quad \Delta f_2 = \Delta f_1 + \Delta^2 f_1, \quad \ldots.$$

Si, dans la seconde formule (6), on remplace f_1 et Δf_1 par

leurs valeurs, tirées de la première formule (6) et de la première formule (7), on a

$$f_2 = f_0 + 2\Delta f_0 + \Delta^2 f_0.$$

On vérifie sans peine que

$$f_3 = f_0 + 3\Delta f_0 + 3\Delta^2 f_0 + \Delta^3 f_0,$$

et l'on est tenté de poser

$$f_m = f_0 + C_m^1 \Delta f_0 + C_m^2 \Delta^2 f_0 + \ldots + \Delta^m f_0;$$

on vérifie cette formule comme la formule (5), en observant que, si elle est vraie, on a encore

$$f_{m+1} = f_1 + C_m^1 \Delta f_1 + C_m^2 \Delta^2 f_1 + \ldots + \Delta^m f_1;$$

d'où

$$f_{m+1} = f_0 + \Delta f_0 + C_m^1(\Delta f_0 + \Delta^2 f_0) + C_m^2(\Delta^2 f_0 + \Delta^3 f_0) + \ldots$$

et, en vertu des propriétés du symbole C_m^1,

$$f_{m+1} = f_0 + C_{m+1}^1 \Delta f_0 + C_{m+1}^2 \Delta^2 f_0 + \ldots.$$

On a donc, symboliquement,

$$f_m = (1 + \Delta)^m f_0,$$

pourvu que, après avoir développé $(1 + \Delta)^m$ par la formule du binôme, on ne regarde plus Δ^n comme une quantité, mais comme un symbole de différentiation.

III. — Examen du cas où la différence de la variable tend vers zéro.

Considérons une fonction $f(x)$, finie et continue, ainsi que ses n premières dérivées, quand sa variable reste comprise entre x et $x + nh$. Supposons en outre que sa $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée soit bien déterminée ou que sa $n^{\text{ième}}$ dérivée soit continue. On aura, en posant $\Delta x = h$,

$$\Delta^n f(x) = f(x + nh) - C_n^1 f(x + \overline{n-1}\,h) + C_n^2 f(x + \overline{n-2}\,h) - \ldots \pm f(x).$$

Si l'on développe chaque terme par la formule de Taylor, on a

$$
\begin{array}{rl|ll|ll|ll}
\Delta^n f(x) = & 1 & f(x) + & n & \dfrac{h}{1} f'(x) + \ldots & n^n & \dfrac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + & h^{n+1} R_0 \\
& - C_n^1 & & - C_n^1 (n-1) & & - C_n^1 (n-1)^n & & - h^{n+1} R_1 \\
& + C_n^2 & & + C_2^n (n-2) & & + C_n^2 (n-2)^n & & \cdot \\
& \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
& \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
& \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\
& \pm 1 & & \pm C_n^{n-1}\, 1 & & \pm C_n^{n-1}\, 1^n & & \pm h^{n+1} R_n.
\end{array}
$$

Dans cette formule, R_0, R_1, ... sont de la forme $f^{n+1}(X)$ multiplié par un facteur numérique; X est un nombre compris entre x et $x + nh$. Par exemple, R_0 est égal à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)} h^{n+1} f^{n+1}(x + \theta nh).$$

Cette formule s'écrit, en appelant R la somme $R_0 + R_1 + \ldots$,

$$\Delta^n f(x) = (\Delta^n x^0)_0 f(x) + (\Delta^n x^1)_0 \frac{h}{1} f'(x) + \ldots$$
$$+ (\Delta^n x^n)_0 \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + R h^{n+1}.$$

Dans cette formule, $(\Delta^i x^n)_0$ représente la différence $i^{\text{ième}}$ de x^n quand on suppose $x = 0$ et $\Delta x = 1$, ainsi que cela résulte de la formule (5) du paragraphe précédent. $(\Delta^i x^n)_0$ sera donc nul, comme on l'a vu, pour $i < n$, et égal à $1.2.3\ldots n\, \Delta x^n$ pour $i = n$ ou, comme $\Delta x = 1$, à $1.2.3\ldots n$. La formule précédente devient alors

$$\Delta^n f(x) = h^n f^n(x) + R h^{n+1};$$

si l'on divise par h^n, on a

$$\frac{\Delta^n f(x)}{h^n} = f^n(x) + R h,$$

et, quand on fait tendre h vers zéro, on voit que, *si* $f^{n+1}(x)$ *existe, ou si* $f^n(x)$ *est continu, la limite de* $\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}$ pour $\Delta x = 0$ est $f^n(x)$.

IV. — Formules d'interpolation de Newton et de Lagrange.

Interpoler, c'est trouver une fonction qui prenne des valeurs données pour des valeurs correspondantes données de sa variable. Le problème de l'interpolation est donc indéterminé. Lagrange s'est proposé de résoudre le problème de l'interpolation en assujettissant la fonction interpolatrice à être entière et de degré inférieur d'une unité au nombre des couples de valeurs simultanées données de la fonction et de la variable. Sa formule, donnée dans les *Éléments*, est

$$(1)\qquad f(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{F(x)}{x - x_i} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)};$$

x_0, x_1, ..., x_n sont les valeurs données de la variable, et $f(x_0)$, ... $f(x_n)$ les valeurs correspondantes données de $f(x)$; et l'on a

$$F(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

On peut vérifier la formule (1) en observant que : 1° le second membre est bien de degré n, $F(x)$ étant un polynôme de degré $n + 1$ divisible par $(x - x_i)$; 2° si l'on fait $x = x_\alpha$, le second membre, qui peut s'écrire

$$\sum \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} f(x_i),$$

devient précisément $f(x_\alpha)$; d'ailleurs la formule (1) peut s'obtenir en décomposant $\frac{f(x)}{F(x)}$ en fractions simples; et $f(x)$ est déterminé en se donnant seulement $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$.

Il est facile de calculer l'erreur commise quand, à une fonction quelconque $f(x)$, on substitue l'expression

$$\sum \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \frac{F(x)}{x - x_i}$$

fournie par la formule de Lagrange, comme si elle était entière. En effet, la quantité

$$f(x) - \sum \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \frac{F(x)}{x - x_i} = \varphi(x)$$

s'annule pour $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$; elle est donc de la forme

$$(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \frac{\varphi^{n+1}(X)}{1.2.3\ldots(n+1)},$$

X désignant une moyenne entre $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$. Or, $\varphi(x)$ étant la somme de $f(x)$ et d'une fonction entière de degré n, sa dérivée $n+1^{\text{ième}}$ se réduira à $f^{n+1}(x)$; on aura donc (p. 75)

$$f(x) = \sum \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \frac{F(x)}{x - x_i} + F(x) \frac{f^{n+1}(X)}{1.2.3\ldots(n+1)}.$$

Avant Lagrange, Newton avait fait connaître une formule d'interpolation fondée sur la théorie des différences, mais qui suppose essentiellement que les valeurs données de la variable soient en progression arithmétique.

Reprenons la formule démontrée au § II,

$$(1) \quad f_n = f_0 + \frac{n}{1} \Delta f_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 f_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 f_0 + \ldots.$$

Si l'on y fait $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ on trouve

$$f_0 = f_0,$$
$$f_1 = f_0 + \Delta f_0,$$
$$f_2 = f_0 + 2\Delta f_0 + \Delta^2 f_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc le second membre de (1) se réduit de lui-même à $f_0, f_1, \ldots f_n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots, n$, c'est-à-dire pour les valeurs de la variable, $x, x+h, x+2h, \ldots, x+nh$.

Si donc on pose

$$x + nh = X, \quad n = \frac{X - x}{h},$$

la formule (1) deviendra

$$f(X) - f(x) = \frac{X-x}{h}\Delta f(x) + \frac{X-x}{h}\frac{X-x-h}{2h}\Delta^2 f(x)$$
$$+ \frac{X-x}{h}\frac{X-x-h}{2h}\frac{X-x-2h}{3h}\Delta^3 f(x) + \ldots,$$

et le second membre de cette formule deviendra $f(x)$ pour $X = x$, $f(x+h)$ pour $X = x+h$, $f(x+2h)$ pour $X = x+2h$, ... Ce second membre, limité à $n+1$ premiers termes, sera donc une fonction entière de X, de degré n, se réduisant à des valeurs arbitraires $f_0, f_1, \ldots, f_n$ pour des valeurs de X en progression arithmétique. Cette formule est celle de Newton. Nous allons nous y arrêter. Posons

(2)
$$\begin{cases} f(X) - f(x) - \dfrac{X-x}{1}\dfrac{\Delta f(x)}{h} - \dfrac{(X-x)(X-x-h)}{1.2}\dfrac{\Delta^2 f(x)}{h^2} - \ldots \\ - \dfrac{(X-x)\ldots(X-x-\overline{n-1}\,h)}{1.2.3\ldots n}\dfrac{\Delta^n f(x)}{h^n} \\ = \dfrac{(X-x)\ldots(X-x-nh)\mathrm{P}}{1.2.3\ldots(n+1)h^{n+1}}, \end{cases}$$

et considérons la fonction de z

$$f(z) - f(x) - \frac{z-x}{1}\frac{\Delta f}{h} - \ldots - \frac{(z-x)(z-x-h)\ldots(z-x-\overline{n-1}\,h)}{1.2.3\ldots n}\frac{\Delta^n f}{h^n}$$
$$- \frac{(z-x)(z-x-h)\ldots(z-x-nh)}{1.2.3\ldots(n+1)}\frac{\mathrm{P}}{h^{n+1}}.$$

Cette fonction s'annule pour $z = X$ et pour $z = x, x+h, \ldots, x+nh$; sa dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ doit donc s'annuler pour une valeur moyenne entre $X, x, x+h, \ldots, x+nh$. Donc

$$f^n(z) - \frac{1.2.3\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(n+1)}\frac{\mathrm{P}}{h^{n+1}} = 0,$$

et, par suite,

$$\mathrm{P} = h^{n+1} f^n(z).$$

La formule (2) donne alors

(3)
$$\begin{cases} f(X) - f(x) = \dfrac{X-x}{1}\dfrac{\Delta f(x)}{h} + \ldots + \dfrac{(X-x)\ldots(X-x-\overline{n-1}\,h)}{1.2.3\ldots n}\dfrac{\Delta^n f(x)}{h^n} \\ + \dfrac{(X-n)\ldots(X-x-nh)}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{n+1}(z), \end{cases}$$

z désignant une moyenne entre $x, x+h, \ldots, X$. Si, dans cette formule ainsi complétée, on fait $h = 0$, en tenant compte de la relation $\lim \frac{\Delta^n f}{h^n} = f^n(x)$, on retrouve (ce qui devait être) la formule de taylor

$$f(X) - f(x) = \frac{X-x}{1} f'(x) + \ldots + \frac{(X-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(z).$$

Présentée sous la forme (3), la formule de Newton devient une identité, et convient à toutes les fonctions continues admettant n dérivées continues ou une $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée bien déterminée.

V. — Formule de Newton généralisée.

Posons

(1) $$\frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0} = f(a_1, a_0),$$

(2) $$\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} = f(a_2, a_1).$$

. . . .

puis

(3) $$\frac{f(a_2, a_1) - f(a_1, a_0)}{a_2 - a_0} = f(a_2, a_1, a_0).$$

. . . .

puis

$$\frac{f(a_3, a_2, a_1) - f(a_2, a_1, a_0)}{a_3 - a_0} = f(a_3, a_2, a_1, a_0).$$

. . . .

Nous aurons évidemment

(4) $$f(a_1) = f(a_0) + (a_1 - a_0) f(a_1, a_0),$$

(5) $$f(a_2) = f(a_1) + (a_2 - a_1) f(a_2, a_1).$$

Si l'on remplace $f(a_1)$ par sa valeur (4) et $f(a_2, a_1)$ par sa valeur (2), on aura

$$\begin{aligned} f(a_2) = f(a_0) &+ (a_1 - a_0) f(a_1, a_0) \\ &+ (a_2 - a_1)[(a_2 - a_0) f(a_2, a_1, a_0) - f(a_1, a_0)], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$f(a_2) = f(a_0) + (a_2 - a_0) f(a_1, a_0) \\ + (a_2 - a_1)(a_2 - a_0) f(a_2, a_1, a_0).$$

On est ainsi conduit à soupçonner la formule

$$(6) \quad \begin{cases} f(a_n) = f(a_0) + (a_n - a_0) f(a_1, a_0) \\ \qquad + (a_n - a_1)(a_n - a_0) f(a_2, a_1, a_0) + \ldots, \end{cases}$$

que l'on vérifie d'ailleurs sans peine. Posons

$$(7) \quad \begin{cases} f(x) = f(a_0) + (x - a_0) f(a_1, a_0) \\ \qquad + (x - a_0)(x - a_1) f(a_2, a_1, a_0) + \ldots \\ \qquad + (x - a_0) \ldots (x - a_{n-1}) f(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) \\ \qquad + P(x - a_0) \ldots (x - a_n). \end{cases}$$

La fonction de z

$$f(z) - f(a_0) - (z - a_0) f(a_1, a_0) - \ldots - P(z - a_0) \ldots (z - a_n)$$

s'annulera : 1° pour $z = x$, en vertu de la formule (7); 2° pour $z = a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, en vertu de la formule (6). Sa $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée sera donc nulle pour une valeur ξ de z, moyenne entre $z, a_0, a_1, \ldots$. Donc

$$f^{n+1}(\xi) - P.1.2.3\ldots(n+1) = 0.$$

Tirant P de là pour le porter dans (7), on a

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) f(a_1, a_0) + \ldots \\ + (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1}) f(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) \\ + \frac{(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_n)}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{n+1}(\xi).$$

Cette formule d'interpolation est due à Ampère. A la forme près, du reste, elle ne diffère pas de la formule connue de Lagrange.

VI. — Autres formules d'interpolation.

Soient $f_0, f_1, \ldots, f_n$ les valeurs de la fonction interpolatrice pour les valeurs correspondantes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de la variable x.

Brassinne (*Journal de Liouville*, 1[re] série, t. II) a fait connaître la formule suivante :

$$f(x) = \frac{A_0 f_0 F(x)(x-x_0)^{-1} + A_1 f_1 F(x)(x-x_1)^{-1} + \ldots}{A_0 F(x)(x-x_0)^{-1} + A_1 F(x)(x-x_1)^{-1} + \ldots},$$

où $F(x)$ désigne le produit $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$, et où $A_0, A_1, A_2, \ldots$ désignent des quantités arbitraires. On peut l'écrire

$$f(x) = \frac{A_0 f_0 (x-x_0)^{-1} + A_1 f_1 (x-x_1)^{-1} + \ldots}{A_0 (x-x_0)^{-1} + A_1 (x-x_0)^{-1} + \ldots}.$$

Voici une formule trigonométrique :

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) & \frac{\sin(x-x_1)\sin(x-x_2)\ldots\sin(x-x_n)}{\sin(x_0-x_1)\sin(x_0-x_2)\ldots\sin(x_0-x_n)} \\ + f(x_1) & \frac{\sin(x-x_0)\sin(x-x_2)\ldots\sin(x-x_n)}{\sin(x_1-x_0)\sin(x_1-x_2)\ldots\sin(x_1-x_n)} \\ + & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On pourrait, par les méthodes suivies plus haut, trouver une limite de l'erreur commise en appliquant ces formules.

Formule d'interpolation de Cauchy.

La formule d'interpolation de Cauchy a pour but de faire connaître une fraction rationnelle dont le numérateur soit de degré m, le dénominateur de degré n, et qui, pour $m+n+1$ valeurs données $a_0, a_1, \ldots, a_{m+n}$ de la variable x, prenne $m+n+1$ valeurs données également.

Soit $f(x)$ la fonction cherchée. Posons

$$\varphi(x) = (x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_n),$$
$$\psi(x) = (x-a_{n+1})(x-a_{n+2})\ldots(x-a_{m+n}).$$

La fonction

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{f(a_0)f(a_1)\ldots f(a_n)}{\psi(a_0)\psi(a_1)\ldots\psi(a_n)}\psi(x)}{\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n} \frac{f(a_0)\ldots f(a_n)}{\psi(a_0)\ldots\psi(a_n)} \frac{\psi(a_i)}{f(a_i)} \frac{\varphi(x)}{(x-a_i)\varphi'(a_i)}}$$

s'annule pour $x = a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+m}$; de plus, son dénominateur, abstraction faite du facteur $\frac{f(a_0)\ldots f(a_n)}{\psi(a_0)\ldots\psi(a_n)}$, commun au numérateur, est précisément égal à $\frac{\psi(x)}{f(x)}$, en vertu de la formule de Lagrange, pour $x = a_0, a_1, \ldots, a_n$; donc, enfin, cette expression (1) se réduit à $f(x)$ pour $x = a_0, a_1, \ldots, a_n$ et à zéro pour $x = a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+m}$.

Soient N le numérateur, D le dénominateur de l'expression (1); effectuons dans N et D toutes les permutations dont les indices $0, 1, 2, 3, \ldots, m+n$ sont susceptibles; soient N_1, $N_2, \ldots, N_\mu$ les diverses valeurs de N, et $D_1, D_2, \ldots, D_\mu$ celles de D; on aura

$$f(x) = \frac{N_1 + N_2 + \ldots + N_\mu}{D_1 + D_2 + \ldots + D_\mu}.$$

En effet, faisons, par exemple, $x = a_0$ dans l'expression précédente. Le numérateur se réduira au produit de $f(a_0)$ par une somme de termes de la forme

$$\frac{f(a_1)\ldots f(a_n)}{\psi(a_1)\ldots\psi(a_n)}\,\frac{1}{\psi(a_0)}\,\psi(a_0) = \frac{f(a_1)\ldots f(a_n)}{\psi(a_1)\ldots\psi(a_n)};$$

quant au dénominateur, il se réduit, pour $x = a_0$, à une somme de termes de la même forme, puisque l'expression $\frac{N_i}{D_i}$ se réduit à $f(a_0)$ pour $x = a_0$, si N_i ne se réduit pas à zéro.

VII. — Expression des dérivées en fonction des différences et vice versa.

Étant données les dérivées d'une fonction $f(x)$, on peut calculer $\Delta^n f$ par la formule de Taylor. Nous avons trouvé, en cherchant la limite de $\frac{\Delta^n f}{\Delta x^n}$,

$$\Delta^n f = (\Delta x^n)_0 \frac{\Delta x^n}{1.2.3\ldots n} f^n(x) + (\Delta x^{n+1})_0 \frac{\Delta x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(x)\ldots$$

On peut écrire, dans cette formule, un nombre de termes

aussi grand que l'on voudra, et le dernier sera d'une forme particulière à laquelle il est inutile de nous arrêter. Mais on peut se proposer la question inverse : connaissant

$$f(x),\quad \Delta f(x),\quad \Delta^2 f(x),\quad \ldots,$$

calculer $f'(x)$, $f''(x)$, ... Voici comment Lagrange arrive au résultat par une induction très curieuse : posons la formule symbolique

$$\Delta f = (e^{hD} - 1)f,$$

d'où, supprimant f comme s'il était un véritable facteur,

$$\Delta = e^{hD} - 1,$$

et, par des calculs tout aussi peu rigoureux,

$$\Delta + 1 = e^{hD},\quad hD = \log(1 + \Delta).$$

Appliquant à $\log(1 + \Delta)$ la formule de Taylor, on a

$$hD = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \ldots$$

et, multipliant par f,

$$hDf \text{ ou } hf'(x) = \Delta f - \tfrac{1}{2}\Delta^2 f + \tfrac{1}{3}\Delta^3 f - \ldots.$$

Quoique ces calculs soient tout à fait dépourvus de sens, le résultat est très voisin de l'exactitude. Et, en effet, nous avons vu que l'on avait

$$f(X) = f(x) + \frac{X - x}{h}\Delta f + \frac{X - x}{h}\,\frac{X - x - h}{2h}\Delta^2 f + \ldots$$
$$+ \frac{X - x}{1}\,\frac{X - x - h}{2}\cdots\frac{X - x - nh}{n + 1} f^{n+1}(\xi);$$

tirons de là $h\dfrac{f(X) - f(x)}{X - x}$, nous aurons

$$h\frac{f(X) - f(x)}{X - x} = \Delta f + \frac{X - x - h}{2h}\Delta^2 f + \ldots + \frac{X - x - h}{2}\cdots f^{n+1}(\xi).$$

Faisant alors $X = x$, il vient

$$(1)\qquad hf'(x) = \Delta f - \frac{1}{2}\Delta^2 f + \ldots \pm \frac{1}{n}\Delta^n f \pm \frac{h^{n+1}}{n + 1} f^{n+1}(\xi),$$

ξ désignant un nombre compris entre x et $x+(n-1)h$. On aurait d'une façon analogue le développement de $h^2 f''(x)$, mais il serait plus compliqué.

Quand on interpole, on peut faire usage de la formule (1) pour calculer la dérivée de la fonction interpolatrice; mais, comme $f^{n+1}(\xi)$ est inconnu, il est difficile de faire usage du dernier terme; alors, le plus souvent, on calcule dans le second membre un nombre de termes assez grand pour que les suivants paraissent négligeables. Sans doute, ce procédé est inexact, mais, à défaut de connaissances précises sur la nature de la fonction empirique que l'on étudie, on choisit les hypothèses les plus plausibles, et il faut dire que la formule (1) fournit généralement des résultats pratiquement suffisants, si h est petit.

VIII. — Application du calcul des différences à la construction des Tables numériques.

Je suppose que l'on veuille dresser une table des diverses valeurs de la fonction x^4, pour des valeurs de x en progression arithmétique dont la raison soit Δx.

On peut éviter de longs calculs comme il suit : on observe que $\Delta^4 x^4$ est constant, que les valeurs de $\Delta^3 x^4$ seront connues dès que l'on connaîtra l'une d'elles; il suffira, en effet, d'y ajouter (ou d'en retrancher) successivement la différence constante $\Delta^4 x^4$. Ayant formé les valeurs de $\Delta^3 x^4$, il suffira, pour former celles de $\Delta^2 x^4$, de connaître l'une d'elles. On aura alors

$$\Delta^2(x+\Delta x)^4 = \Delta^2 x^4 + \Delta^3 x^4, \quad \ldots;$$

ayant formé les valeurs de $\Delta^2 x^4$, il suffira d'avoir une des valeurs de Δx^4 pour posséder toutes les autres; enfin, pour avoir toutes les valeurs de x^4, il suffira d'en posséder une seule. Ainsi, par de simples additions ou soustractions, on se procurera toutes les valeurs de x^4, connaissant une valeur de x et les valeurs de ses différences.

Dans le Tableau ci-dessous, on a supposé $\Delta x = 1$, et l'on a formé, au moyen de la méthode exposée, les quatrièmes puissances de 4, 5, 6. On a calculé directement 0^4, 1^4, 2^4 et 3^4 que l'on a inscrits dans la colonne intitulée x^4; dans la colonne intitulée Δ, on a inscrit $\Delta 0^4$, $\Delta 1^4$, $\Delta 2^4$; dans la colonne Δ^2, on a inscrit $\Delta^2 0^4$, $\Delta^2 1^4$; on a inscrit, dans la suivante, $\Delta^3 0^4$. Toutes ces différences ont été calculées au moyen des quatre premières valeurs 0, 1, 16, 81 de x^4. Quant à $\Delta^4 0$, on l'a calculé directement; il est égal à 1.2.3.4.

x	x^4	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0	1	14	36	24
1	1	15	50	60	
2	16	65	110	84	
3	81	175	194	108	
4	256	369	302		
5	625	671			
6	1296				

La Table une fois préparée, on a procédé ainsi qu'il suit :

En ajoutant $\Delta^4 0^4 = 24$ à $\Delta^3 0^4 = 36$, on a obtenu...... $\Delta^3 0^4 = 60$

En ajoutant ce nombre à $50 = \Delta^2 1^4$, on a obtenu...... $\Delta^2 2^4 = 110$

En ajoutant ce nombre à $65 = \Delta 3^4$, on a obtenu....... $\Delta 4^4 = 175$

Enfin, en ajoutant ce nombre à $81 = 3^4$, on a obtenu... 4^4

En ajoutant $24 = \Delta 0^4 = \Delta 1^4$ 1 à $60 = \Delta^3 1^4$, on a obtenu. $\Delta^3 2^4 = 84$

....

Une marche analogue aurait permis de calculer $(-1)^4$, $(-2)^4$, ... par de simples additions ou soustractions.

Cette méthode peut être étendue à des fonctions quelconques qui ne sont pas entières, quand les différences Δx ne sont pas très grandes : 1° parce que l'expérience apprend que, le plus souvent, les différences premières, secondes, ... vont en décroissant et peuvent, au bout d'un certain temps, être

considérées comme nulles, au point de vue du calcul numérique; 2° ou bien parce que l'on a des procédés pour calculer directement les différences d'un certain ordre.

Dans les Tables de logarithmes, par exemple, les différences premières restent longtemps constantes; les différences secondes sont donc, au point de vue numérique, nulles, c'est-à-dire négligeables.

IX. — Application à la construction des Tables de logarithmes.

La formule de Taylor nous a permis de développer la fonction $\log(1+x)$ en série; on a trouvé (p. 90)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots;$$

en changeant x en $-x$, on a

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots,$$

d'où, par soustraction,

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right).$$

Si l'on remplace x par $\frac{1}{2x+1}$, on trouve

$$\log\frac{x+1}{x} = 2\left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \ldots\right].$$

Cette formule suppose que l'on a affaire à des logarithmes népériens; en posant alors

$$\log \text{vulg}\, e = \text{M} = \frac{1}{\log 10},$$

on a

$$(1) \qquad \log(x+1) - \log x = 2\text{M}\left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \ldots\right],$$

et, cette fois, les logarithmes sont pris dans la base 10. Cette

formule donne donc les différences tabulaires au moyen d'une série d'autant plus convergente que x est plus grand.

De la formule précédente, on tire, en changeant x en $x-1$,

$$\log x - \log(x-1) = 2\mathrm{M}\left(\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3(2x-1)^3} + \dots\right),$$

et, par soustraction,

$$\log(x+1) - 2\log x + \log(x-1) = -4\mathrm{M}\left(\frac{1}{4x^2-1} + \dots\right).$$

Cette formule fait connaître les différences secondes : elle est encore bien plus convergente que la première. Nous montrerons seulement l'usage que l'on peut faire de la formule (1). Il faut d'abord calculer le module. Supposant alors $\mathrm{M} = 1$, pour commencer, on a

$$(2) \qquad \log\text{nép}(x+1) - \log\text{nép}\, x = 2\left(\frac{1}{2x+1} + \dots\right),$$

et, en faisant $x = 1$,

$$\log\text{nép}\, 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \dots\right).$$

Ayant calculé log nép 2 au moyen de cette formule, on en déduira log nép 8 en triplant; en faisant $x = 8$ dans la formule (2), on en déduira log nép 9; puis, en faisant $x = 9$, on aura log nép 10 et par suite M. Ce calcul une fois effectué, avec une exactitude suffisante, on fera successivement $x = 1000$, $x = 1001 \dots$ dans la formule (1); des séries très convergentes fourniront alors les différences tabulaires d'où l'on déduira les logarithmes des nombres, car on sait que $\log 1000 = 3$.

Comme on a calculé directement log 2 et log 9, on pourra en déduire log 4, 8, 16, ..., log 5, 10, 20, ..., log 3, 9, 27, ..., log 6, 12, ..., ce qui fournira des vérifications de temps en temps.

X. — Construction des Tables de sinus.

On a proposé de calculer directement les tables de logarithmes de sinus au moyen de certains développements en série dont il sera question plus loin. Mais nous pensons que l'emploi des méthodes plus élémentaires est au moins aussi rapide.

Pour construire une table de sinus et cosinus naturels, on fait usage des formules de Simpson, démontrées dans les éléments de Trigonométrie, et que nous transcrivons de nouveau :

$$[\sin(m+1) - \sin mh] - [\sin mh - \sin(m-1)h] = -2k \sin mh,$$

k désignant la quantité très petite $1 - \cos h = 2\sin^2 \frac{1}{2} h$. Cette formule, en y faisant $h = \Delta x$, $mh = x$, peut s'écrire

$$\Delta^2 \sin(x - \Delta x) = -2k \sin x.$$

On a, de même,

$$\Delta^2 \cos(x - \Delta x) = -2k \cos x.$$

Les formules de Simpson font donc connaître, en définitive, les différences secondes des fonctions $\sin x$, $\cos x$.

Pour dresser une table de sinus, par exemple, on formera un tableau analogue à celui qui est figuré ci-dessous :

Arcs.	Sinus.	Δ.	Δ^2.
0	0	$\Delta \sin 0$	$-2k \sin h$
h	$\sin h$	$\Delta \sin h$	$-2k \sin 2h$
$2h$	$\sin 2h$	$\Delta \sin 2h$	
$3h$	$\sin 3h$		

Dans la colonne intitulée *Arcs*, on inscrit les arcs 0, $h = \Delta x$, $2h = 2\Delta x$, ... ; dans la colonne intitulée *Sinus*, on inscrit 0 et $\sin h$ que l'on suppose connu ; dans la colonne

intitulée Δ, on inscrit $\Delta \sin 0$, ou, ce qui est la même chose, la valeur de $\sin h$; dans la colonne intitulée Δ^2, on inscrit d'abord $-2k \sin h = \Delta^2 \sin 0$, que l'on peut calculer, puisque l'on connaît $2k$ et $\sin h$. Connaissant $\Delta \sin 0$ et $\Delta^2 \sin 0$, on a, par une simple addition algébrique ou par une soustraction arithmétique, $\Delta \sin h$, que l'on inscrit, puis $\sin 2h$, que l'on obtient en ajoutant $\sin h$ avec $\Delta \sin h$ que l'on vient de calculer; connaissant $\sin 2h$, on calcule

$$-2k \sin 2h = \Delta^2 \sin h,$$

et ainsi de suite.

Il reste à montrer comment on calcule $\sin h$, k, et comment on se ménage des vérifications : $\sin h$ se calcule au moyen de la série

$$(1) \qquad \sin h = h - \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots,$$

et $k = (1 - \cos h)$ au moyen de la suivante :

$$1 - \cos h = \frac{h^2}{1.2} - \frac{h^4}{1.2.3.4} + \ldots;$$

ces séries ont été données page 49. On pourra calculer quelques sinus, soit au moyen de la série (1), soit au moyen de la suivante :

$$\sin(a + h) = \sin a \left(1 - \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) + \cos a \left(h - \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots\right),$$

quand on connaîtra $\sin a$ et $\cos a$.

II. — Application de la théorie des différences à la résolution des équations.

On peut faire usage du calcul des différences pour substituer des nombres équidistants à la place de x dans la fonc-

tion $f(x)$. Si la fonction $f(x)$ est entière, les différences d'un ordre égal au degré de $f(x)$ seront constantes, ainsi que nous l'avons montré, et l'on peut en profiter pour calculer plus facilement $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$, ... qu'en faisant un calcul direct. Nous avons observé que, si la quantité h était petite, les différences d'un ordre plus ou moins élevé devenaient constantes, numériquement, même pour des fonctions transcendantes. Le calcul rapide des quantités $f(x)$, $f(x+h)$, ..., par la méthode des différences, peut alors révéler, dans un certain intervalle tel que $f(x)$ et $f(x+h)$ soient de signes contraires, la présence d'une racine de $f(x) = 0$.

Il y a plus : en supposant $f(x)$ et $f(x+h)$ de signes contraires, et en appelant $x+\varepsilon$ la valeur de la racine, de telle sorte que $f(x+\varepsilon) = 0$, on aura à peu près

$$\varepsilon = -\frac{h f(x)}{\Delta f(x)}.$$

Cela résulte de la formule de Newton

$$f(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{x - x_0}{h} \frac{x - x_0 - h}{2h} \Delta^2 f_0 + \ldots$$

quand on y fait $f(x) = 0$, $f_0 = f(x)$, $x - x_0 = \varepsilon$, et que l'on néglige les termes dépendant de Δ^2, Δ^3, ...

Quand on a découvert un intervalle, $h = \Delta x$, comprenant une racine de $f(x) = 0$, on peut diviser de nouveau cet intervalle et calculer les valeurs de $f(x)$, $f(x+h')$, $f(x+2h')$, ..., h' désignant une nouvelle différence de x moindre que h. Posons

$$h = \Delta x, \quad h' = \delta x,$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f, \qquad f(x + \delta x) - f(x) = \delta f,$$

$$\Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x) = \Delta^2 f, \quad \delta f(x + \delta x) - \delta f(x) = \delta^2 f.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nous allons montrer comment on peut calculer δf, $\delta^2 f$, ... en fonction de Δf, $\Delta^2 f$, ...

La formule d'interpolation de Newton donne

$$f\left(x_0 + \frac{n\,\Delta x_0}{\mu}\right) = f(x_0) + \frac{n}{\mu}\,\Delta f + \frac{n(n-\mu)}{1.2.\mu^2}\,\Delta^2 f + \frac{n(n-\mu)(n-2\mu)}{1.2.3.\mu^3}\,\Delta^3 f + \ldots.$$

Donc

$$\partial^k f\left(x_0 + \frac{n\,\Delta x_0}{\mu}\right) = \partial^k \frac{n}{\mu}\cdot\Delta f + \partial^k \frac{n(n-\mu)}{1.2.\mu^2}\,\Delta^2 f + \ldots.$$

Si $k > 1$, $\partial^k n = 0$; si $k > 2$, $\partial^k n = 0$ et $\partial^k n(n-\mu) = 0$, ...

Pour $n = 0$, on tire de là

$$\partial f = \frac{\Delta f}{\mu} + \frac{\Delta^2 f}{1.2.\mu^2}(2n - \mu + 1) + \ldots,$$

. . . .

Voici des formules toutes calculées, pour le cas où $\mu = 10$:

$$\partial f = 0{,}1\,\Delta f - 0{,}045\,\Delta^2 f + 0{,}0285\,\Delta^3 f - 0{,}0206625\,\Delta^4 f + \ldots,$$
$$\partial^2 f = 0{,}01\,\Delta^2 f - 0{,}009\,\Delta^3 f + 0{,}007725\,\Delta^4 f - \ldots,$$
$$\partial^3 f = 0{,}001\,\Delta^3 f - 0{,}00135\,\Delta^4 u + \ldots,$$
$$\partial^4 f = 0{,}0001\,\Delta^4 f - \ldots.$$

Ces formules seront en général suffisantes pour tous les besoins de la pratique.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

I. — Sur les divers ordres d'infiniment petits.

Nous avons appelé *infiniment petit* toute quantité variable ayant pour limite zéro, et quantité *infinie* toute quantité variable susceptible de prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut.

Pour la commodité du langage, nous distinguerons plusieurs espèces d'infiniment petits. Une variable α ayant été prise pour infiniment petit principal, nous appellerons *infiniment petit du premier ordre* toute variable β telle que la limite de $\frac{\beta}{\alpha}$ soit finie et différente de zéro quand α tend vers zéro.

En général, si, α tendant vers zéro, la limite de $\frac{\beta}{\alpha^n}$ est finie et différente de zéro, on dira que β est *d'ordre n*.

En appelant donc ω une quantité finie et différente de zéro, et β un infiniment petit d'ordre n, on aura

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = \omega$$

ou

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = \omega + \varepsilon,$$

ε désignant une quantité infiniment petite; il en résulte

$$\beta = \omega\alpha^n + \alpha^n\varepsilon.$$

$\alpha^n\varepsilon$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à n, car $\frac{\alpha^n\varepsilon}{\alpha^n}$

tend vers zéro. Ainsi, la forme générale d'un infiniment petit d'ordre n est $\omega\alpha^n$ + un terme d'ordre supérieur à n.

Quand on parle d'un infiniment petit d'ordre supérieur à n, on ne veut pas toujours dire que l'ordre de cet infiniment petit soit déterminé et puisse être évalué numériquement : on veut dire seulement que le quotient de cet infiniment petit par α^n est nul à la limite. Cette remarque est importante, car il y a des infiniment petits auxquels on ne peut assigner aucun ordre, mais que l'on peut toutefois considérer comme étant d'un ordre supérieur à d'autres d'un ordre déterminé.

Prenons, par exemple, α pour infiniment petit du premier ordre; $\alpha(\log\alpha)^{-1}$ ne sera d'aucun ordre : en effet, nous savons que $\frac{(\log\alpha)^{-1}}{\alpha^\mu}$ ne tend vers aucune limite quand α tend vers zéro, quelle que soit la valeur attribuée à μ, et cependant $\alpha(\log\alpha)^{-1}$ est d'ordre supérieur à l'unité.

La considération des divers ordres d'infiniment petits est extrêmement utile en Analyse; elle permet de simplifier des calculs qui seraient sans cela fort longs. Le principe sur lequel reposent ces simplifications peut s'énoncer comme il suit :

Lorsque l'on cherche la limite du rapport de deux infiniment petits, on peut, sans erreur dans le résultat, remplacer ces infiniment petits par d'autres, pourvu que la limite du rapport de ceux que l'on supprime à ceux qu'on leur substitue soit l'unité.

En effet, supposons que $\lim\frac{\alpha}{\alpha'} = 1$, $\lim\frac{\beta}{\beta'} = 1$. Je dis que l'on aura

$$\lim\frac{\alpha}{\beta} = \lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

En effet,

$$\lim\frac{\alpha}{\beta} = \lim\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\,\frac{\alpha}{\alpha'}\,\frac{\beta'}{\beta}\right) = \lim\frac{\alpha'}{\beta'}\lim\frac{\alpha}{\alpha'}\lim\frac{\beta'}{\beta} = \lim\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

C. Q. F. D.

Mais on peut énoncer le principe précédent sous une autre forme, souvent plus utile dans les applications. A cet effet, observons deux choses :

1° *Si la limite du rapport $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est l'unité, α différera de α' d'une quantité infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à α et β.*

En effet, la limite de $\frac{\alpha}{\alpha'}$ étant 1, $\frac{\alpha}{\alpha'}$ diffère de 1 d'une quantité infiniment petite ε, et l'on a

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \alpha' + \alpha'\varepsilon.$$

La différence entre α et α' est donc $\alpha'\varepsilon$, quantité d'ordre supérieur à α ou α', puisque le rapport de cette quantité à α' est ε, qui, par hypothèse, tend vers zéro. C. Q. F. D.

2° *Si la différence entre deux infiniment petits α et α' est d'ordre supérieur par rapport à chacun d'eux, la limite du rapport $\frac{\alpha}{\alpha'}$ est 1.*

En effet, soit ω la différence entre α et α' : on aura

$$\alpha = \alpha' + \omega,$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \frac{\omega}{\alpha'}.$$

Or, ω étant d'ordre supérieur à α', par définition $\lim \frac{\omega}{\alpha'} = 0$. L'équation précédente devient donc, en passant aux limites,

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1.$$

C. Q. F. D.

Du théorème démontré tout à l'heure et des deux remarques précédentes découle le principe suivant :

Principe fondamental. — *On n'altère pas la limite du rapport de deux infiniment petits, en négligeant dans l'expression de chacun d'eux des infiniment petits d'ordre supérieur.*

En effet, cela revient à remplacer les infiniment petits

par d'autres dont la limite du rapport à ceux-ci tend vers l'unité.

Afin de bien faire comprendre le sens et le mode d'application de ce théorème fondamental, nous en ferons usage pour trouver la limite du rapport

$$\frac{\sin x}{x - x^2}$$

pour $x = 0$.

Nous remarquerons à cet effet que, $\sin x$ différant de x d'une quantité moindre que $\frac{x^3}{4}$, c'est-à-dire du troisième ordre par rapport à x, on peut remplacer $\sin x$ par x; de même, au dénominateur, on peut négliger x^2, qui est du second ordre par rapport à x; la limite à trouver est alors celle de $\frac{x}{x}$ ou 1.

En général, si l'on veut trouver la limite du rapport de deux polynômes en x pour $x = 0$, il n'y aura besoin que de considérer les termes des degrés les moins élevés, les autres termes étant, par définition même, des termes d'ordre supérieur, et par suite négligeables.

L'*Analyse infinitésimale* consiste dans l'application des principes que nous venons d'établir et surtout du principe fondamental que nous avons énoncé en dernier lieu.

II. — Définition des différentielles.

Soient $f(x)$ une fonction de x possédant une dérivée $f'(x)$, et Δx un accroissement infiniment petit donné à sa variable. On a

$$\lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

ou bien, en appelant ε une quantité infiniment petite avec Δx,

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

et, en chassant le dénominateur,

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x$$

ou enfin

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+E_2,$$

E_2 désignant un infiniment petit d'ordre supérieur à Δx, puisque $E_2=\varepsilon\,\Delta x$, et que $\frac{E_2}{\Delta x}=\varepsilon$ a pour limite zéro par hypothèse. En général, $f'(x)$ est fini; donc $f'(x)\Delta x$ et $\Delta f(x)$ sont des infiniment petits du premier ordre qui ne diffèrent entre eux que par un infiniment petit d'ordre supérieur E_2.

En vertu de notre principe fondamental, toutes les fois qu'il s'agira de trouver une limite de rapport dont l'un des termes sera $\Delta f(x)$ ou $f'(x)\,\Delta x$, on pourra substituer l'une de ces quantités à l'autre sans qu'il en résulte d'erreur dans le résultat final.

Ordinairement le calcul de $f'(x)\Delta x$ est plus simple que celui de Δf, en sorte qu'il est avantageux de le substituer à celui de Δf. L'importance de cette substitution est telle, que l'on a éprouvé le besoin de donner un nom à cette quantité $f'(x)\Delta x$; on l'appelle la *différentielle* de $f(x)$.

Ainsi, la *différentielle* d'une fonction d'une variable est le produit de la dérivée de cette fonction par l'accroissement arbitraire de sa variable.

Cette définition de la différentielle ne suppose pas l'accroissement de la variable infiniment petit; ainsi la différentielle d'une fonction n'est pas nécessairement infiniment petite, bien qu'il y ait le plus souvent intérêt à la considérer comme telle. On représente la différentielle de la fonction f par df; ainsi l'on a

$$df=f'(x)\Delta x.$$

On voit donc que la différentielle df diffère en général de l'accroissement Δf, mais par une quantité du second ordre. Si, cependant, on avait $f'(x)=1$ ou $f(x)=x+c$, la for-

mule précédente donnerait

$$df = \Delta x = \Delta f.$$

En particulier, si l'on prend $f(x) = x$, et, par suite, $f'(x) = 1$, la formule qui définit df, à savoir $df = f'(x)\,\Delta x$, donnera

$$dx = \Delta x.$$

Ainsi, *l'accroissement ou la différence et la différentielle de la variable indépendante sont égaux.*

La formule

$$df = f'\Delta x,$$

qui sert de définition à la différentielle de f, pourra donc s'écrire

$$df = f'\,dx,$$

d'où l'on tire

(1)
$$f' = \frac{df}{dx}.$$

Ainsi, *la dérivée d'une fonction est rigoureusement le quotient de la différentielle de cette fonction par la différentielle de sa variable.* Nous adopterons le plus souvent la notation $\frac{df}{dx}$ pour représenter la dérivée de f. On sentira plus tard toute la supériorité de cette notation, due à Leibnitz, sur celle de Lagrange, qui est celle que l'on emploie dans les éléments (*voir*, à cet égard, le paragraphe relatif au changement de variable).

La différentielle df est une fonction de x ; à ce titre, elle possédera elle-même une différentielle (si elle a une dérivée); cette différentielle, $d.df$, se représente par d^2f. La différentielle de d^2f se représente par d^3f. . . . ; et df, d^2f, d^3f, . . . sont dites les *différentielles première, seconde, troisième,* . . . de f. Soit

$$df = f'dx;$$

pour avoir $d.df$ ou d^2f, il faudra prendre la dérivée de df ou de $f'dx$, et multiplier le résultat par dx. Or, dx,

accroissement arbitraire Δx de x, est indépendant de x ou, si l'on veut, est constant quand x varie ; la dérivée de $f' dx$ est donc $f'' dx$ et sa différentielle $f'' dx \,.\, dx$ ou $f'' dx^2$. Ainsi

$$(2) \qquad d^2 f = f'' dx^2,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f'',$$

ce qui nous autorise à adopter la notation $\frac{d^2 f}{dx^2}$ pour représenter la dérivée seconde de f.

Pour avoir $d \,.\, d^2 f$ ou la différentielle troisième $d^3 f$ de f, il faudra différentier $f'' dx^2$, qui est égal à $d^2 f$; pour cela, on en prendra la dérivée, $f''' dx^2$, et on la multipliera par dx, ce qui donnera

$$d^3 f = f'''(x)\, dx^3,$$

et ainsi de suite. En général, on aura

$$d^n f = f^n(x)\, dx^n \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x),$$

ce qui nous autorisera dorénavant à employer la notation $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour représenter la $n^{\text{ième}}$ dérivée de f.

III. — Remarques au sujet de la formule de Taylor.

Reprenons la formule de Taylor, et écrivons-la ainsi :

$$(1) \quad f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \frac{h^2}{1 \,.\, 2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1 \,.\, 2 \ldots n} f^n(x + \theta h).$$

Elle ne suppose pas la dérivée $n^{\text{ième}}$, $f^n(x)$, continue dans l'intervalle qui sépare x de $x+h$; elle suppose simplement que cette dérivée *existe*.

Supposons maintenant que $f^n(x)$ soit continu ; alors on a

$$f^n(x + \theta h) = f^n(x) - \varepsilon,$$

ε désignant une quantité infiniment petite avec h ou *a for-*

tiori avec θh; on pourra donc écrire la formule (1) ainsi :

$$(2)\quad f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(x)+E_{n+1},$$

E_{n+1} désignant $\frac{\varepsilon h^n}{1.2\ldots n}$, c'est-à-dire une quantité d'ordre supérieur à n quand on suppose h infiniment petit. E_{n+1}, telle est la forme que l'on peut donner au reste dans la formule de Taylor, quand la dernière dérivée employée est continue.

Maintenant, supposons $h=\Delta x$; nous aurons

$$f(x+h)-f(x)=\Delta f(x).$$

La formule (2) pourra alors s'écrire

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+f''(x)\frac{\Delta x^2}{1.2}+\ldots+f^n(x)\frac{\Delta x^n}{1.2.3\ldots n}+E_{n+1}.$$

Or on a, par définition,

$$\begin{aligned} f'(x)\,\Delta x &= f'(x)\,dx = df,\\ f''(x)\,\Delta x^2 &= f''(x)\,dx^2 = d^2f,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ f^n(x)\,\Delta x^n &= f^n(x)\,dx^n = d^nf. \end{aligned}$$

La formule précédente devient alors

$$(3)\quad \Delta f=df+\frac{1}{1.2}d^2f+\frac{1}{1.2.3}d^3f+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}d^nf+E_{n+1},$$

E_{n+1} désignant un infiniment petit d'ordre supérieur à n, quand on suppose $\Delta x=dx$ infiniment petit du premier ordre.

Cette formule suppose la continuité de $f^n(x)$ quand la variable reste comprise entre x et $x+dx$.

La formule de Taylor est souvent employée sous les formes (2) et (3).

IV. — Comparaison des différences et des différentielles.

Nous avons vu que

$$\lim\frac{\Delta^n f}{\Delta x^n}=f^n(x).$$

On peut écrire cette formule ainsi :

$$\frac{\Delta^n f}{\Delta x^n} = f^n(x) + \varepsilon,$$

ε désignant une quantité infiniment petite avec $\Delta x = dx$.

Remplaçons Δx par dx et f^n par son égal $\frac{d^n f}{dx^n}$; nous aurons

$$\frac{\Delta^n f}{dx^n} = \frac{d^n f}{dx^n} + \varepsilon$$

ou bien, en appelant E_{n+1} l'infiniment petit d'ordre supérieur à n qui est le produit εdx^n,

$$\Delta^n f = d^n f + E_{n+1}.$$

Cette formule montre que *la différence* $n^{\text{ième}}$ *d'une fonction est égale à sa différentielle* $n^{\text{ième}}$, *à un infiniment petit près d'ordre supérieur au* $n^{\text{ième}}$. Les quantités $d^n f$ et $\Delta^n f$ sont d'ordre n; elles pourront donc se substituer l'une à l'autre dans la recherche de la limite d'un rapport. On a d'ailleurs

$$\lim \frac{\Delta^n f}{d^n f} = 1.$$

V. — Remarques sur le Calcul différentiel. — Son avantage sur le calcul des dérivées.

La différentielle d'une fonction étant le produit de sa dérivée par la différentielle de la variable, on aura

$$d.x^m = m x^{m-1}\, dx,$$

$$d \log x = \frac{1}{x}\, dx \log e.$$

$$de^x = e^x\, dx,$$

. . . .

Il est bon de noter les formules

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} & d(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw, \\ & d(uvw) = vw\, du + uw\, dv + uv\, dw, \\ & d\frac{u}{v} = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules se démontrent en observant que, si l'on divise par dx, les quantités $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, ... représentent les dérivées u, v, ..., et qu'alors elles expriment les règles de la dérivation des sommes, des produits, des quotients.

Ainsi, par exemple, la formule

$$\text{dérivée de } (uvw) = vwu' + uwv' + uvw'$$

s'écrit, avec la notation différentielle $\left(u' = \frac{du}{dx}\right)$,

$$\frac{d(uvw)}{dx} = vw\frac{du}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx},$$

et, en chassant le dénominateur dx, on a la deuxième formule. Notons encore, pour la discuter, la formule

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx},$$

qui est relative à la dérivation des fonctions de fonctions. Au fond, elle est une identité, mais on pourrait craindre que $\frac{du}{dv}$ n'exprimât point la dérivée de u considéré comme fonction de v, parce que v n'est pas variable indépendante; mais, quel que soit le choix de la variable indépendante, il est facile de constater que les rapports des diverses différentielles ne sont pas altérés; en d'autres termes :

Théorème. — *Quand on prend pour variable indépendante une fonction quelconque de l'ancienne variable, les différentielles des fonctions quelconques de l'ancienne variable ne changent pas de valeur si l'une quelconque d'entre elles conserve une valeur fixe.*

En effet, appelons $d_y u$, $d_y v$ les différentielles de u et v quand $y = F(x)$ est pris pour variable indépendante, et $d_x u$, $d_x v$ les différentielles de u et v relatives à x. On aura

$$d_x u = u'_x\,dx, \quad d_x v = v'_x\,dx.$$

Donc

$$\frac{d_x u}{d_x v} = \frac{u'_x}{v'_x} = \frac{u'_y\,y'_x}{v'_y\,y'_x} = \frac{u'_y}{v'_y} = \frac{u'_y\,d_y y}{v'_y\,d_y y} = \frac{d_y u}{d_y v};$$

et si $d_x x = d_y x = dx$, on obtiendra, en particulier, en faisant $v = x$,

$$\frac{d_x u}{dx} = \frac{d_y u}{dx} \quad \text{ou} \quad d_x u = d_y u.$$

C. Q. F. D.

Ainsi, il n'y a pas à proprement parler de variable indépendante, et df se trouve être une quantité qui ne dépend pas du choix de la variable indépendante, tandis que f' varie suivant que x ou y sont variables indépendantes ; c'est là un des avantages de la notation différentielle ; il y en a beaucoup d'autres.

On peut d'ailleurs donner des différentielles une définition tout à fait indépendante du choix de la variable, et dire que : *quand des quantités u, v, w, ..., x varient simultanément, leurs différentielles sont des quantités finies proportionnelles aux accroissements infiniment petits simultanés de ces quantités u, v, w, ...*

On verra plus loin, au contraire, que le choix de la variable indépendante influe sur la valeur des différentielles d'ordre supérieur au premier.

A tout théorème sur les dérivées correspond un théorème sur les différentielles, provenant de ce que la dérivée et la différentielle sont égales à un facteur près, qui est l'accroissement arbitraire de la variable. Ainsi :

Lorsqu'une fonction est constante, sa différentielle est nulle. Lorsqu'une fonction a sa différentielle nulle et qu'elle est continue, elle est constante ; etc....

V. — Sur un mode de raisonnement employé dans l'Analyse infinitésimale.

Lorsque l'on cherche à établir une relation entre diverses différentielles, on peut toujours négliger les infiniment petits d'ordre supérieur (et, par suite, on aura toujours des équations homogènes en considérant la lettre d comme une quantité

et d^2, d^3, ... comme ses puissances); le résultat final sera exact.

Une démonstration est nécessaire, non seulement pour établir ce fait, mais encore pour bien en faire saisir le sens.

Je suppose qu'ayant cherché à établir une relation entre des différentielles on soit parvenu au résultat suivant :

$$(1) \qquad A\,d^2y + B\,dx^2 + C\,dz^2 = 0,$$

où A, B, C désignent des quantités indépendantes de dx. Tous les termes étant du même ordre, par suite de l'omission des termes d'ordre supérieur au second, ce résultat (1) n'est pas établi en toute rigueur; cependant je dis qu'il est exact : en effet, s'il était inexact, il suffirait d'ajouter l'ensemble des termes ω d'ordre supérieur au second que l'on a négligés et l'on aurait exactement

$$A\,d^2y + B\,dx^2 + C\,dz^2 + \omega = 0.$$

Divisons cette formule par dx^2, nous aurons

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B + C\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\omega}{dx^2} = 0.$$

Or, quel que soit dx, on a $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = z'^2$; donc

$$Ay'' + B + Cz'^2 + \frac{\omega}{dx^2} = 0,$$

résultat exact, quel que soit dx; mais, pour $dx = 0$, $\frac{\omega}{dx^2}$ tend vers zéro et l'on a exactement

$$Ay'' + B + Cz'' = 0;$$

ou en multipliant par dx^2, que nous supposons quelconque,

$$A\,d^2y + B\,dx^2 + B\,dz^2 = 0.$$

Cette formule est donc exacte, et ω est rigoureusement nul.

Ce résultat cessera d'être paradoxal, si l'on se rappelle que, quels que soient dx, dy, dz, ..., d^2x, d^2y, d^2z, ..., leurs rapports sont déterminés et que les relations entre dx, dy, ..., devant avoir lieu quel que soit dx, les termes de

même degré par rapport à dx, ou de même ordre, doivent être nuls séparément. Il suffit donc d'écrire les termes d'ordre le moins élevé, qui sont en général les plus faciles à calculer. Le degré d'un terme ou son ordre est indiqué par le nombre des opérations effectuées avec d, quand une formule ne contient que des différentielles et pas d'autres infiniment petits; il faut donc que les formules d'Analyse infinitésimale soient homogènes en d, comme si cette caractéristique était une quantité ayant pour puissances d^2, d^3, ...

Un exemple va nous permettre d'éclaircir ces considérations.

Problème. — *Un puits cylindrique est plein d'eau; on paye a^f l'extraction du premier mètre de profondeur d'eau, combien payera-t-on l'extraction de l'eau sur x mètres de hauteur?*

Soit dp l'accroissement du prix p cherché quand la profondeur à extraire croît de dx (je devrais dire : soit Δp l'accroissement du prix quand x croît de $dx = \Delta x$; je néglige donc la différence entre Δp et dp, qui est d'ordre supérieur à dp). Ce prix est égal à la hauteur dx enlevée, multipliée par la hauteur x à laquelle elle est transportée, et par un facteur K qui représente la somme que l'on paye pour élever le poids de 1^m de hauteur d'eau à 1^m de hauteur, soit $\mathrm{K}x\,dx$. (Ici encore, je commets une erreur; la hauteur à laquelle on transporte la quantité dx n'est pas x; mais le prix à payer est compris entre les prix qu'il faudrait payer si toute l'épaisseur dx était à la distance x ou à la distance $x + dx$ de l'ouverture du puits; ces deux prix étant $\mathrm{K}x\,dx$ et $\mathrm{K}(x + dx)\,dx$ ne diffèrent que par le terme du second ordre $\mathrm{K}\,dx^2$: l'erreur commise sur $\mathrm{K}x\,dx$ est donc d'ordre supérieur au premier.) On a donc

$$dp = \mathrm{K}x\,dx. \tag{α}$$

Cette formule est rigoureuse, bien que notre raisonnement en apparence ne le soit pas. D'après ce que nous avons

dit tout à l'heure, appelant ω l'ensemble des termes du second ordre négligés, on a

$$dp = \mathrm{K}x\,dx + \omega \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dx} = \mathrm{K}x + \frac{\omega}{dx}.$$

Faisant $dx = 0$, on a $p' = \mathrm{K}x$; puis, multipliant par dx supposé différent de zéro, on reproduit la formule (α) qui est exacte. En vertu de cette formule p et $\frac{\mathrm{K}x^2}{2}$ ont mêmes différentielles dp et $\mathrm{K}x\,dx$; elles sont donc égales à une constante près c; donc

$$(\beta) \qquad p = \mathrm{K}\frac{x^2}{2} + c.$$

On déterminera c en faisant $x = 1$, alors $p = a$ et

$$(\gamma) \qquad a = \frac{\mathrm{K}}{2} + c.$$

Si l'on veut déterminer à la fois K et c, on fera $x = 0$ et l'on devra avoir $p = 0$, car un travail nul ne doit pas être payé, et l'on aura

$$(\delta) \qquad 0 = c.$$

Les formules (β), (γ), (δ) donnent

$$a = \frac{\mathrm{K}}{2} \quad \text{et} \quad p = ax^2.$$

CHAPITRE VI.

DÉRIVÉES, DIFFÉRENCES ET DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

I. — Sur le calcul des expressions symboliques.

On a déjà vu que l'on pouvait représenter par une lettre un symbole d'opération. Ainsi l'opération qui a pour but de prendre la dérivée de φ et de la multiplier par h se représente par $d\varphi$, ... Quand on applique deux, trois fois de suite l'opération d, on l'indique en attachant l'exposant 2, 3, ... à la lettre d. Cette règle est générale; pour donner un exemple de cette façon de procéder, convenons de représenter par le symbole P l'opération consistant à multiplier par x la dérivée de la quantité placée après le signe P; nous aurons

$$P\varphi(x) = x\frac{d\varphi}{dx},$$

$$P^2\varphi(x) = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

par exemple,

$$Px^m = mx^m, \quad P^2x^m = m^2x^m, \quad \ldots, \quad P^nx^m = m^nx^m.$$

Un symbole P est *distributif* quand on a

(1) $$P(a+b) = Pa + Pb.$$

Ainsi, en représentant par D le symbole de la dérivation, en sorte que $D\varphi = \varphi'$, on a

$$D(a+b) = D(a) + D(b),$$

$$\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b,$$

$$d(a+b) = da + db;$$

D, Δ, d sont des symboles distributifs.

Les symboles distributifs sont les plus importants et nous allons suivre les conséquences de la formule (1).

1° *D'abord on a*

$$P(a+b+c) = P(a+b) + Pc = Pa + Pb + Pc,$$

et ainsi de suite. Donc, en général,

$$(2) \qquad P\Sigma a = \Sigma Pa.$$

2° *Les symboles* P^2, P^3, ... *sont distributifs; on les appelle puissances de* P.

En effet, on a

$$P(a+b) = Pa + Pb;$$

donc

$$P^2(a+b) = P(Pa+Pb) = P.Pa + P.Pb,$$

c'est-à-dire

$$P^2(a+b) = P^2a + P^2b.$$

On verrait de même que P^3, P^4, ... sont distributifs.

3° *En appelant* A *une constante numérique, on a*

$$P.Aa = A.Pa.$$

En effet, si A est entier, on a

$$P.Aa = P(a+a+\ldots+a) = Pa + Pa \ldots = APa.$$

Si A est de la forme $\frac{p}{q}$, on observera que

$$qP\frac{a}{q} = Pa;$$

donc

$$P\frac{a}{q} = \frac{1}{q}Pa,$$

et, par suite,

$$P\frac{pa}{q} = \frac{p}{q}Pa.$$

Cette proposition étant vraie, quels que soient p et q, est vraie pour les valeurs incommensurables de A.

4° On a

$$P(a-b) = Pa - Pb,$$

car on en déduit

$$P(a-b)+Pb=Pa,$$

ce qui est exact, et de celle-ci on déduit la précédente.

5° *On en conclut*

$$P(Aa \pm Bb \pm \ldots) = APa \pm BPb \pm \ldots.$$

On appelle *somme* de plusieurs symboles d'opérations P, Q, R, et l'on représente par $P+Q+R$ le symbole Θ défini par la formule

$$\Theta a = Pa + Qa + Ra.$$

En général, le symbole Θ, défini par la formule

$$\Theta a = APa \pm BQa \pm CRa,$$

se représente par $AP \pm BQ \pm CR$; de sorte que l'on a, par définition,

$$(AP \pm BQ)a = APa \pm BQa.$$

6° *Lorsque* P, Q, R, ... *sont distributifs,* $AP \pm BQ \pm CR$ *l'est également.*

En effet :

$$\begin{aligned}(AP \pm BQ \pm CR)(a+b) &= AP(a+b) \pm BQ(a+b) \pm CR(a+b)\\ &= APa + APb \pm BQa \pm BQb \pm \ldots\\ &= (AP \pm BQ \pm CR)a + (AP \pm BQ \pm CR)b.\end{aligned}$$

On appelle *produit* de plusieurs opérations le résultat obtenu en effectuant successivement ces opérations. Ainsi l'opération Θ, définie par l'équation

$$\Theta a = PQR\ldots a,$$

est le produit des opérations P, Q, R, ... On représente cette opération par le symbole PQR, ..., dans lequel il faut bien se garder d'intervertir les facteurs; dans la suite, pour exprimer que deux opérations sont équivalentes, nous les séparerons par ce signe $=$. Ainsi $\Theta = P + Q$ voudra dire que, quel que soit f, on a $\Theta f = (P+Q)f = Pf + Qf$.

Deux symboles P, Q sont *commutatifs* quand on a

$$PQf = QPf.$$

7° *Si* P *et* Q *sont commutatifs, on peut écrire dans un ordre arbitraire les symboles* P *et* Q *répétés dans un ordre donné.*

Par exemple, considérons l'opération

$$\ldots PQ \ldots f,$$

dans laquelle les points remplacent les lettres P, Q écrites dans un ordre quelconque. Je dis que

$$\ldots PQ \ldots f = \ldots QP \ldots f,$$

les deux membres ne différant que par les opérations écrites.

En effet, on a

$$PQ \ldots f = QP \ldots f,$$

car P et Q sont commutatifs ; répétant sur les deux membres de cette identité les mêmes opérations, on obtient des résultats identiques :

$$\ldots PQ \ldots f = \ldots QP \ldots f;$$

puisque l'on peut intervertir l'ordre de deux opérations consécutives quelconques, on peut écrire toutes les opérations dans tel ordre que l'on veut. La même démonstration s'appliquerait au théorème suivant :

8° *Si* P, Q, R, ... *sont commutatifs, deux à deux, on peut effectuer ces opérations successives dans un ordre quelconque.*

9° *Si* P *et* Q *sont commutatifs, il en est de même de* P^2 *et de* Q^2.

10° *Si* P, Q, R, ... *sont distributifs, le produit* PQR ... *le sera aussi, que* P, Q, R, ... *soient ou non commutatifs deux à deux.*

En effet,

$$R(a+b) = Ra + Rb.$$

Mais, Q étant distributif, on a

$$QR(a+b) = Q(Ra + Rb) = QRa + QRb,$$

puis

$$PQR(a+b) = P(QRa + QRb) = PQRa + PQRb.$$

C. Q. F. D.

11° *La puissance* $m^{\text{ième}}$ *du symbole* $(P + Q + R)$ *se forme absolument comme si* P, Q, R *étaient de véritables quantités. Ainsi*

$$(P + Q + R)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!} P^\alpha Q^\beta R^\gamma,$$

pourvu que P, Q, R, ... *soient commutatifs.*

En effet, on a

$$(P + Q)^2 f = (P + Q)(P + Q)f$$

ou

$$\begin{aligned}(P + Q)^2 f = (P + Q)(Pf + Qf) &= P(Pf + Qf) + Q(Pf + Qf)\\ &= P^2 f + PQf + QPf + Q^2 f\\ &= P^2 f + 2PQf + Q^2 f;\end{aligned}$$

car $PQ = QP$, par hypothèse. Posons, pour simplifier, $P + Q = \Theta$, et admettons la formule

$$\Theta^n f = P^n f + C_n^1 P^{n-1} Q f + C_n^2 P^{n-2} Q^2 f + \ldots$$

comme démontrée; effectuons sur le premier membre l'opération Θ et sur le second les deux opérations successives P et Q, puis ajoutons les résultats; nous aurons, en observant que P et Q sont commutatifs,

$$\begin{aligned}\Theta^{n+1} f = P^{n+1} f + C_n^1 P^n Q f + C_n^2 P^{n-1} Q^2 f + \ldots\\ + P^n Q f + C_n^1 P^{n-1} Q^2 f + \ldots\end{aligned}$$

ou, en vertu des propriétés connues du symbole C_m^n,

$$\Theta^{n+1} f = P^{n+1} f + C_{n+1}^1 P^n Q f + C_{n+1}^2 P^{n-1} Q^2 f + \ldots.$$

La loi étant démontrée pour l'indice n l'est donc pour l'indice $n + 1$; or elle est établie pour les indices 1, 2; donc elle est générale. Soit maintenant

$$\Theta f = Pf + Qf + Rf;$$

on aura, en posant $\Theta_1 f = Pf + Qf$,

$$\Theta f = \Theta_1 f + Rf,$$

$$\Theta^n f = \Theta_1^{n-1} f + C_n^1 \Theta^{n-1} R f + \ldots + \frac{n!}{\alpha!\gamma!} \Theta^\alpha R^\gamma f + \ldots$$

ou

$$\Theta^n f = \sum \frac{n!}{\alpha!\gamma!} \Theta^\alpha R^\gamma f,$$

et, remplaçant Θ^μ par sa valeur $\sum \frac{\mu!}{\alpha!\,\beta!} P^\alpha Q^\beta f$,

$$\Theta^n f = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} P^\alpha Q^\beta R^\gamma f.$$

C. Q. F. D.

Remarques au sujet des dérivées des fonctions de plusieurs variables.

Considérons une fonction de plusieurs variables x, y, z, savoir $f(x, y, z)$. Cette fonction devient fonction de x seul, quand, laissant y et z constants, on fait varier x. A ce point de vue, elle peut être différentiée une, deux, trois, ... fois, et nous représenterons ses dérivées par $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$, $\frac{d^3 f}{dx^3}$, ... Chacune de ces fonctions, $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$, par exemple, dépendra en général de x, de y et de z; si on laisse x et z constants, elle sera fonction de y et l'on pourra, par exemple, en prendre la dérivée β fois de suite. On écrira le résultat ainsi $\frac{d^{\alpha+\beta} f}{dx^\alpha\, dy^\beta}$; cette fonction dépend encore en général de x, y, z. On peut en prendre la dérivée γ fois de suite par rapport à x; on aura alors $\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma} f}{dx^\alpha\, dy^\beta\, dx^\gamma}$; puis δ fois de suite par rapport à z, ce qui donnera $\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} f}{dx^\alpha\, dy^\beta\, dx^\gamma\, dz^\delta}$, et ainsi de suite. Cette notation se simplifie un peu en ayant égard au théorème suivant :

Théorème. — *Une dérivée ne change pas de valeur quand on intervertit l'ordre des dérivations relatives à chaque variable.*

Démontrons d'abord le théorème pour le cas où l'on n'intervertit que l'ordre de deux dérivations successives. Soit $f(x, y)$ une fonction de plusieurs variables, dans laquelle on ne met en évidence que les variables x et y. Soit

$$f_1 = \frac{df}{dx}, \quad f_2 = \frac{df}{dy}, \quad f_{11} = \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad f_{22} = \frac{d^2 f}{dy^2},$$

$$f_{12} = \frac{d^2 f}{dx\, dy}, \quad f_{21} = \frac{d^2 f}{dy\, dx};$$

il s'agit de prouver que $f_{12} = f_{21}$. Si h et k sont deux valeurs infiniment petites de même ordre, on a, par la formule de Taylor,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + hf_1(x, y+k) + \frac{h^2}{1.2} f_{11}(x, y+k) + E_3,$$

E_3 désignant un terme d'ordre supérieur au second. Développons $f(x, y+k)$, $f_1(x, y+k)$, $f_{11}(x, y+k)$ suivant les puissances de k; nous aurons, en appelant toujours E'_3, E''_3, ... des termes d'ordre supérieur au second,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x+h, y+k) = f(x, y) &+ kf_2(x, y) + \frac{k^2}{1.2} f_{22}(x, y) + E'_3 \\ &+ hf_1(x, y) + hk\, f_{12}(x, y) + E''_3 \\ &+ \frac{h^2}{1.2} f_{11}(x, y) + E'''_3 \\ &+ E_3. \end{aligned}\right.$$

En commençant par écrire

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = f(x+h, y) &+ kf_2(x+h, y) \\ &+ \frac{k^2}{1.2} f_{22}(x+h, y) + e, \end{aligned}$$

puis en développant $f(x+h, y)$, $f_2(x+h, y)$, $f_{22}(x+h, y)$ suivant les puissances de h, on trouve

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = f(x, y) &+ hf_1(x, y) + \frac{h^2}{1.2} f_{11}(x, y) + e' \\ &+ kf_2(x, y) + kh\, f_{21}(x, y) + e'' \\ &+ \frac{k^2}{1.2} f_{22}(x, y) + e''' \\ &+ e. \end{aligned}$$

Si l'on compare cette formule avec (1), on a

$$f_{12}\, kh = f_{21}\, kh + \omega,$$

ω désignant un ensemble de termes d'ordre supérieur au second. Divisant par hk, on a alors

$$f_{21} = f_{12} - \frac{\omega}{hk}.$$

Et, comme $\frac{\omega}{hk}$ tend vers zéro pour $h = 0$, $k = 0$, il reste

$$f_{21} = f_{12},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il est clair que ce théorème cesserait d'être exact, si l'une des dérivées secondes de $f(x, y)$ n'était pas continue, la formule de Taylor, sur laquelle nous avons fondé notre démonstration, cessant elle-même d'avoir lieu.

En suivant une méthode employée en Arithmétique pour démontrer que la valeur d'un produit ne dépend pas de l'ordre de ses facteurs, on prouvera que, ayant le droit d'intervertir l'ordre de deux dérivations successives, on peut intervertir aussi l'ordre des dérivations d'une façon arbitraire.

Cela posé, pour représenter une dérivée d'ordre supérieur prise relativement à plusieurs variables, on pourra se borner à indiquer le nombre total des dérivations relatives à chaque variable. C'est ainsi que l'on écrira, par exemple,

$$\frac{d^4 f}{d^2 x\, dy\, dz} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{d^4 f}{dx\, dy\, dz\, dx}, \quad \ldots.$$

Remarque. — Les symboles $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ sont commutatifs et distributifs. On a donné le nom de dérivées *partielles* à ces dérivées prises successivement par rapport aux diverses variables en laissant les autres constantes, pour les distinguer de ce que l'on appelle une dérivée *totale*.

Supposons que, dans $f(x, y, z)$, les variables x, y, z cessent d'être indépendantes, et que y et z soient fonctions de x; d'après le théorème des fonctions composées, la dérivée de f relative à x, que nous appellerons dérivée *totale* relative à x, sera donnée par la formule

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}.$$

Cette dérivée, d'après nos notations, devrait être représentée par $\frac{df}{dx}$; mais il y aurait confusion si l'on écrivait

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx},$$

car les deux $\frac{df}{dx}$ figurant ici ne sauraient être égaux ; on a pro-

posé plusieurs moyens d'obvier à cet inconvénient. L'un d'eux consiste à envelopper d'une parenthèse les dérivées partielles; l'autre, qui paraît plus généralement répandu, consiste à changer dans les dérivées partielles la forme du d. La formule précédente s'écrira alors

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

Il importe de bien voir que $\frac{df}{dx}$ diffère de $\frac{\partial f}{\partial x}$; il importe surtout de bien voir que les trois ∂f qui figurent dans cette formule sont inégaux, ce qui fait des symboles $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\cdots$ des quotients dont on convient de ne jamais chasser les dénominateurs; et d'abord $\frac{df}{dx}$ est le rapport des accroissements que prennent f et x quand on fait croître x de dx, et que par suite y croît de dy et z de dz; tandis que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est le rapport des accroissements infiniment petits de f et de x, quand, faisant croître x de ∂x, on laisse y et z invariables.

Le ∂f qui entre dans $\frac{\partial f}{\partial x}$ est l'accroissement que prend f quand x croît de ∂x, y et z restant invariables; le ∂f qui figure dans $\frac{\partial f}{\partial y}$ est l'accroissement que prend f quand, x cessant de varier, y seul croît, et de ∂y; ces deux ∂f sont donc inégaux en général. (Il est presque inutile d'ajouter qu'il s'agit d'accroissements infiniment petits et que l'on néglige les termes du second ordre.)

III. — Formule de Taylor généralisée.

Si l'on considère la fonction de t

$$\varphi(t) = f(x + ht, y + kt, z + lt),$$

cette fonction pourra être développée par la formule de Maclaurin. Pour effectuer ce développement, formons ses dérivées successives; nous aurons, par le théorème des fonctions

composées, et en faisant, pour abréger, $x+ht=a$, $y+kt=b$, $z+lt=c$,

$$\varphi'(t)=\frac{d}{dt}f=\frac{\partial f}{\partial a}h+\frac{\partial f}{\partial b}k+\frac{\partial f}{\partial c}l;$$

ainsi l'opération $\frac{d}{dt}$ est équivalente à

$$h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}.$$

On aura donc

$$\varphi^n(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}+l\frac{\partial}{\partial c}\right)^n f,$$

et pour $t=0$,

$$\varphi^n(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f.$$

Nous aurons donc, en substituant cette valeur dans la formule de Maclaurin

$$\varphi(t)=\varphi(0)+t\varphi'(0)+\frac{t^2}{1.2}\varphi''(0)+\ldots+\frac{t^{n+1}}{1.2\ldots n+1}\varphi^{n+1}(\theta t),$$

l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
&f(x+ht,y+ht,z+lt)\\
&\quad=f(x,y,z)+\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}\right)\quad\ldots\\
&\quad+\frac{1}{1.2\ldots n}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f\\
&\quad+\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\left[h\frac{\partial}{\partial(x+\theta ht)}+\ldots\right]^{n+1}f(x+\theta ht,\ldots);
\end{aligned}$$

et, si l'on fait $t=1$,

$$\begin{aligned}
f(x+h,y+k,z+l)&=f(x,y,z)+\sum_1^n\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ldots\right)^n f\frac{1}{n!}\\
&\quad+\frac{1}{(n+1)!}\left[h\frac{\partial}{\partial(x+\theta h)}+k\frac{\partial}{\partial(y+\theta k)}+\ldots\right]^{n+1}f.
\end{aligned}$$

Le reste est écrit sous une forme abrégée qui se comprend facilement : après avoir fait l'opération

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+\ldots\right)^{n+1}f(x,y,z),$$

on remplace x par $x+\theta h$, y par $y+\theta k$, et z par $z+\theta l$. La formule précédente suppose $\varphi(t)$ continue, ainsi que ses n premières dérivées, quand t varie de 0 à 1. La $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée doit être bien déterminée : ceci revient à supposer $f(x, y, z)$ finie et continue, ainsi que ses n premières dérivées, quand les variables restent comprises entre x et $x+h$, y et $y+k$, z et $z+l$. Les $(n+1)^{\text{ièmes}}$ dérivées doivent exister et être bien déterminées ; si l'on ne sait rien sur les $(n+1)^{\text{ièmes}}$ dérivées, le reste affectera la forme E_{n+1} d'un infiniment petit d'ordre supérieur à n par rapport à h, k, l supposés de même ordre.

On remarquera surtout la formule

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, z+l) = f(x,y,z) &+ hf_1(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l),\\ &+ kf_2(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l),\\ &+ lf_3(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l), \end{aligned}$$

où $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ désignent, pour simplifier, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.

IV. — Différences des fonctions de plusieurs variables.

Considérons une fonction de plusieurs variables que nous supposons, pour fixer les idées, au nombre de deux. Soit

$$f(x, y)$$

cette fonction ; si l'on donne à x et y des accroissements simultanés Δx, Δy, cette fonction varie d'une quantité que l'on appelle la *différence* de cette fonction ; on la désigne par Δf. Nous poserons

$$\begin{aligned} f_0 &= f(x,y),\\ f_1 &= f(x+\Delta x, y+\Delta y),\\ f_2 &= f(x+2\Delta x, y+2\Delta y),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ f_n &= f(x+n\Delta x, y+n\Delta y); \end{aligned}$$

nous aurons alors

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0, \quad \Delta f_1 = f_2 - f_1, \quad \Delta f_2 = f_3 - f_2, \quad \ldots$$

Δf est, en général, fonction de x et y, et l'on pose $\Delta\Delta f = \Delta^2 f$; $\Delta^2 f$ s'appelle la *différence seconde* de f, et l'on a

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0, \quad \Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1, \quad \ldots,$$

et ainsi de suite; les formules auxquelles on est conduit sont identiques à celles que l'on rencontre pour le cas où la fonction f ne dépend que d'une seule variable, et il est inutile, d'après ce qui précède, de donner une nouvelle démonstration des formules

$$\Delta^n f_0 = f_n - C_n^1 f_{n-1} + C_n^2 f_{n-2} - \ldots \pm f_0,$$
$$f_n = f_0 + C_n^1 \Delta f_0 + C_n^2 \Delta^2 f_0 + \ldots + \Delta^n f_0.$$

Mais, à côté de ces différences, que l'on peut appeler *complètes*, viennent se placer une série de différences auxquelles on a donné le nom de *différences partielles* et dont nous allons dire quelques mots.

Dans la fonction f, on peut laisser y constant et faire seulement varier x; f a alors, par rapport à cette variable, une série de différences que l'on indique par un indice; ainsi l'on pose

$$\Delta_x f(x,y) = f(x + \Delta x, y) - f(x,y),$$
$$\Delta_x^2 f(x,y) = f(x + 2\Delta x, y) - 2f(x + \Delta x, y) + f(x,y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on a de même

$$\Delta_y f(x,y) = f(x, y + \Delta y) - f(x,y), \quad \ldots.$$

Il n'y a là rien de nouveau, car, dans chacun des cas où l'on ne fait varier que x ou que y, on n'a réellement affaire qu'à une fonction d'une seule variable; on dit que $\Delta_x f, \Delta_x^2 f, \ldots$ sont les différences *partielles* de f relatives à x.

Les signes Δ_x et Δ_y sont commutatifs et distributifs : il est évident qu'ils sont l'un et l'autre distributifs, et, si l'on fait attention que $\Delta_x \Delta_y f$ est égal à

$$\Delta_x[f(x, y + \Delta y) - f(x,y)],$$

ou à

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x,y),$$

on verra sans peine que la symétrie de ce résultat entraîne la formule

$$\Delta_x \Delta_y f = \Delta_y \Delta_x f,$$

ce qui est la propriété fondamentale des symboles commutatifs. Posons, pour abréger,

$$f(x, y) = f_{00}, \quad \ldots, \quad f(x + i\,\Delta x, y + j\,\Delta y) = f_{ij}, \quad \ldots;$$

nous aurons

$$\Delta_x^\alpha f_{00} = \sum (-1)^i C_\alpha^i f_{i0},$$

et, en prenant β fois de suite la différence relative à y,

$$\Delta_y^\beta \Delta_x^\alpha f_{00} = \sum (-1)^{i+j} C_\alpha^i C_\beta^j f_{ij}.$$

Si l'on désigne par S_x l'opération qui a pour but d'ajouter Δx à la première variable figurant sous le signe f, et par S_y l'opération qui a pour but d'ajouter Δy à la seconde variable, en sorte que

$$S_x f_{ij} = f_{i+1,\,j}, \quad S_y f_{ij} = f_{i,\,j+1},$$

on pourra écrire

$$S_x^i S_y^j f_{00} = f_{ij};$$

les signes S_x et S_y étant évidemment commutatifs et distributifs, on aura

$$\Delta_x^\alpha f_{00} = (S_x - 1)^\alpha f_{00}$$

ou, si l'on veut,

$$\Delta_x^\alpha = (S_x - 1)^\alpha,$$

et par suite, en général,

$$\Delta_x^\alpha \Delta_y^\beta \ldots \Delta_z^\gamma = (S_x - 1)^\alpha (S_y - 1)^\beta \ldots (S_z - 1)^\gamma.$$

On peut résoudre la question inverse et trouver f_{ij} en fonction des différences de f. On a en effet

$$f_{i,0} = (1 + \Delta_x)^i f_{00},$$

et par suite

$$f_{i,j} = (1 + \Delta_x)^i (1 + \Delta_y)^j f_{00},$$

et en général

$$S_x^i S_y^j \ldots S_z^k = (1 + \Delta_x)^i (1 + \Delta_y)^j \ldots (1 + \Delta_z)^k.$$

Nous ferons observer que l'on peut déduire de là une formule d'interpolation analogue à celle de Newton et que l'on pourrait même appeler *formule de Newton généralisée;* cette formule serait

$$f(X, Y) = f(x, y) + \ldots + C_\alpha^i C_\beta^j f(x + i\,\Delta x, y + j\,\Delta y) + \ldots,$$

dans laquelle il faudrait remplacer α par $\frac{X - x}{\Delta x}$ et β par $\frac{Y - y}{\Delta y}$.

Enfin, en terminant, nous ferons observer que la limite de $\Delta_x^\alpha \Delta_y^\beta f_{00}$ divisé par $\Delta x^\alpha \Delta y^\beta$ est la dérivée $\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$. On pourrait démontrer cette proposition directement à l'aide du théorème de Taylor, mais on peut aussi observer que, Δx et Δy étant tout à fait indépendants, on peut les faire tendre successivement vers zéro; on a donc

$$\lim \frac{\Delta_x^\alpha \Delta_y^\beta f}{\Delta x^\alpha \Delta y^\beta} = \frac{\partial^\alpha \Delta_y^\beta f}{\partial x^\alpha \Delta y^\beta} \quad \text{pour} \quad \Delta x = 0,$$

et, faisant tendre Δy vers zéro, on a la formule qu'il s'agissait d'établir. Mais cette démonstration est peut-être moins rigoureuse.

V. — Formules d'interpolation pour les fonctions de plusieurs variables.

Nous avons observé, au paragraphe précédent, que la formule qui donne la différence d'une fonction de plusieurs variables en fonction de ses différences peut servir à généraliser la formule de Newton. La formule de Lagrange peut être également généralisée comme il suit.

Soit, pour fixer les idées, $f(x, y)$ une fonction de deux variables; la formule de Lagrange donne

$$(1) \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n+1} f(x_i, y) \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots}{(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots},$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ désignant des valeurs arbitraires de x; cette formule approchée devient exacte si f est une fonction entière par rapport à x de degré n; or on a

$$(2)\ f(x_i, y) = \sum_{j=1}^{j=n+1} f(x_i, y_j) \frac{(y-y_1)\ldots(y-y_{j-1})(y-y_{j+1})\ldots}{(y_j-y_1)\ldots(y_j-y_{j-1})(y_j-y_{j+1})\ldots},$$

formule exacte si f est entier et de degré n par rapport à y.

Si l'on combine les équations (1) et (2), on trouve

$$f(x, y) = \sum_{i+1}^{i=n+1} \sum_{j+1}^{j=n+1} f(x_i, y_j) \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots}$$
$$\times \frac{(y-y_1)\ldots(y-y_{j-1})(y-y_{j+1})\ldots}{(y_j-y_1)\ldots(y_j-y_{j-1})(y_j-y_{j+1})\ldots},$$

et l'on voit facilement comment on pourrait encore généraliser. Si l'on pose

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1}) = \varphi(x),$$
$$(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_{n+1}) = \psi(y),$$

on peut écrire ainsi qu'il suit la formule précédente :

$$f(x, y) = \sum\sum f(x_i, y_j) \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_i)} \frac{\psi(y)}{\psi'(y_j)} \frac{1}{x-x_i} \frac{1}{y-y_j},$$

ou

$$\frac{f(x, y)}{\varphi(x)\psi(y)} = \sum\sum \frac{f(x_i, y_j)}{\varphi'(x_i)\psi'(y_j)} \frac{1}{x-x_i} \frac{1}{y-y_j}.$$

Les deux membres de cette équation sont développables suivant les puissances de x et y; en égalant de part et d'autre les coefficients de $\frac{1}{xy}$, on trouve

$$\omega = \sum \frac{f(x_i, y_i)}{\varphi'(x_i)\psi'(y_j)}.$$

Si f est de degré moindre que n, la quantité ω est nulle.

VI. — Différentielles totales.

On appelle *différentielle totale,* ou simplement *différentielle* d'une fonction de plusieurs variables, la somme des

produits obtenus en multipliant la dérivée de la fonction par rapport à chaque variable par un accroissement arbitraire donné à cette variable.

Soit, par exemple, $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables x, y, z; la différentielle totale de f, que l'on représente par df, sera définie par l'équation

$$(1) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z,$$

Δx, Δy, Δz désignant trois accroissements arbitraires et indépendants donnés à x, y, z respectivement. Si l'on prenait tour à tour $f = x$, $f = y$, $f = z$, la formule (1) donnerait, en observant que $\frac{\partial x}{\partial x}$ est égal à 1, que $\frac{\partial x}{\partial y}$ est égal à zéro, etc.,

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y, \quad dz = \Delta z,$$

ce qui nous autorise à écrire l'équation (1), qui sert de définition à df, ainsi :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Si, comme on le fait toujours, à moins de prévenir expressément du contraire, on suppose les accroissements $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, ... des variables de même ordre infinitésimal, on pourra énoncer le théorème suivant :

Théorème fondamental. — *L'accroissement que subit une fonction de plusieurs variables, quand on donne des accroissements de même ordre à ses variables, est, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, égal à sa différentielle, et par suite, dans une limite de rapport, l'accroissement d'une fonction peut être remplacé par sa différentielle sans changer le résultat.*

En effet, si l'on désigne par $f(x, y, z)$ une fonction de x, y, z, on aura par la formule de Taylor

$$\Delta f \text{ ou } f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right) + E_2,$$

E_2 désignant un infiniment petit d'ordre supérieur au premier. Cette formule peut s'écrire

$$\Delta f = df + E_2,$$

ce qui démontre le théorème.

La différentielle df d'une fonction de plusieurs variables $f(x, y, z)$ est une fonction de x, y, z; elle possède, à ce titre, elle-même une différentielle totale que l'on désigne par $d^2 f$; cette différentielle $d^2 f$, à son tour, possède une différentielle totale que l'on désigne par $d^3 f$, et ainsi de suite

Calculons la *différentielle totale seconde* $d^2 f$ de f; on a

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz;$$

le symbole

$$d = \frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\,dz,$$

somme des symboles $\frac{\partial}{\partial x}dx$, $\frac{\partial}{\partial y}dy$, $\frac{\partial}{\partial z}dz$, est commutatif et distributif comme ceux-ci ; on peut donc écrire

$$(2) \qquad d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\,dz\right)^2 f,$$

et en général

$$(3) \qquad d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\,dz\right)^n f.$$

Je n'ai pas besoin de rappeler que l'équation (2) développée donnera

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2$$
$$+ 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\,dx\,dz + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\,dy\,dz + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,dz^2,$$

formule que l'on peut vérifier directement sans faire usage du calcul des symboles, et dans laquelle il ne faut pas perdre de vue que x, y, z sont des variables *essentiellement indépendantes,* caractérisées par ce fait que $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, ... sont, chacun en particulier, tout à fait arbitraires et par suite indépendants des variables x, y, z elles-mêmes.

Il résulte de là une notation très commode pour écrire la

formule de Taylor; $f(x+dx, y+dy, z+dz)-f(x,y,z)$ étant représenté par Δf, on a symboliquement

$$\begin{aligned}\Delta f = {} & \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ & + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 f \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n f + E_{n+1},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\Delta f = df + \frac{1}{2}d^2 f + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n}d^n f + E_{n+1},$$

E_{n+1} désignant un terme d'ordre supérieur à n.

On a vu que

$$\lim \frac{\Delta_x^\alpha \Delta_y^\beta f}{\Delta x^\alpha \Delta y^\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta},$$

d'où l'on conclut que $\Delta_x^\alpha \Delta_y^\beta$ peut être substitué, dans les limites de rapport, à $\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} dx^\alpha dy^\beta$; mais ce théorème a beaucoup moins d'importance que celui-ci :

Théorème. — *Les quantités $d^n f$ et $\Delta^n f$ sont égales, à des termes près d'ordre supérieur à n.*

La différence et la différentielle totale d'une fonction peuvent donc se substituer l'une à l'autre dans les calculs de limites de rapports. Pour le prouver, observons que

$$\Delta^n f = f_n - C_n^1 f_{n-1} + C_n^2 f_{n-2} - \ldots;$$

en développant chaque terme par la formule de Taylor, mise sous la forme

$$\Delta f = d^n f + \frac{1}{2}d^2 f + \frac{1}{1.2.3.}d^3 f + \ldots,$$

on a

$$\begin{aligned}\Delta^n f = {} & n\,df + \frac{n^2}{1.2}d^2 f + \ldots + \frac{n^n}{1.2.3\ldots n}d^n f + E_{n+1} \\ & - C_n^1(n-1)df - C_n^1\frac{(n-1)^2}{1.2}d^2 f - \ldots \\ & + C_n^2(n-2)^2\,df + C_n^2\frac{(n-2)^2}{1.2}d^2 f + \ldots \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Les coefficients de df, d^2f, ... sont nuls, celui de d^nf est égal à l'unité, comme on l'a vu plus haut (p. 102); on a donc

$$\Delta^n f = d^n f + \varepsilon_{n+1},$$

ε_{n+1} étant un infiniment petit d'ordre supérieur à n.

C. Q. F. D.

VII. — Calcul des différentielles partielles.

La différentielle totale d'une somme est égale à la somme des différentielles totales de ses parties et, plus généralement, $au + bv + cw + \ldots$, a, b, c désignant des constantes, a pour différentielle totale

$$a\,du + b\,dv + c\,dw + \ldots.$$

En effet, pour prendre la différentielle totale de

$$au + bv + cw + \ldots,$$

il faudra prendre ses dérivées relatives aux variables indépendantes et les multiplier par les différentielles de ces variables, puis ajouter. Ainsi, x, y, z, ... désignant les variables dont u, v, ... sont fonctions,

$$d(au + bv + \ldots) = \frac{\partial(au + bv + \ldots)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial(au + bv + \ldots)}{\partial y}\,dy + \ldots$$

ou

$$d(au + bv + \ldots) = \left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots\right)dx + \left(a\frac{\partial u}{\partial y} + b\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots\right)dy + \ldots,$$

ou

$$\begin{aligned} d(au + bv + \ldots) = {} & a\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + a\frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \ldots \\ & + b\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + b\frac{\partial v}{\partial y}\,dy + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

ou enfin

$$d(au + bv + \ldots) = a\,du + b\,dv + \ldots.$$

C. Q. F. D.

De même, on a

$$d(uvw\dots) = vw\dots du + uw\dots dv + \dots,$$

ou

$$\frac{d(uvw\dots)}{uvw\dots} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \dots;$$

en effet, on a

$$d(uvw) = \frac{\partial(uvw)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial(uvw)}{\partial y}\,dy + \dots,$$

ou

$$\begin{aligned} d(uvw) = {} & \left(vw\dots\frac{\partial u}{\partial x} + uw\dots\frac{\partial v}{\partial x} + \dots\right)dx \\ & + \left(vw\dots\frac{\partial u}{\partial y} + uw\dots\frac{\partial v}{\partial y} + \dots\right)dy \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ = {} & vw\dots\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \dots\right) \\ & + uw\dots\left(\frac{\partial v}{\partial u}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy + \dots\right) + \dots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$d(u.v.w\dots) = vw\dots du + uw\dots dv + uv\dots dw + \dots.$$

On verrait de même que

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

On a aussi

$$d\varphi(u) = \varphi'(u)du,$$

$$d\varphi(u, v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

en effet,

$$\begin{aligned} d\varphi(u, v) = {} & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \dots\right)dx \\ & + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \dots\right)dy + \dots, \end{aligned}$$

ou

$$d\varphi(u, v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv.$$

VIII. — Principes fondamentaux pour l'application du Calcul différentiel.

Lorsque l'on veut établir une relation quelconque entre des différentielles, on peut toujours négliger, vis-à-vis des termes d'ordre le moins élevé, les termes d'ordre supérieur, pourvu que les termes conservés ne contiennent pas d'autres infiniment petits que des différentielles.

En effet, supposons que, en négligeant des infiniment petits du second ordre, on soit parvenu à des formules telles que

$$A\,du + B\,dv + C\,dw + \ldots = 0;$$

cette formule étant vraie aux termes du second ordre près, la suivante sera rigoureuse :

$$A\,du + B\,dv + C\,dw + \ldots + \varepsilon = 0,$$

ε désignant un terme du second ordre; et l'on pourra écrire, en divisant par dx,

$$A\,\frac{du}{dx} + B\,\frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{\varepsilon}{dx} = 0,$$

du, dv, ..., dx étant de même ordre, soit

$$\lim\frac{du}{dx} = u', \quad \lim\frac{dv}{dx} = v', \quad \ldots.$$

Quelques-unes de ces limites sont arbitraires, mais, par cela même, on peut les supposer finies, en supposant, par exemple, que l'on assujettisse momentanément toutes les variables indépendantes à recevoir des accroissements égaux à dx. tandis que $\frac{\varepsilon}{dx}$ tend vers zéro : si bien que, pour $dx = 0$, on a

$$A\,u' + B\,v' + C\,w' + \ldots = 0,$$

d'où

$$A\,u'\,dx + B\,v'\,dx + C\,w'\,dx + \ldots = 0;$$

mais $u'\,dx$, $v'\,dx$, $w'\,dx$, ... sont rigoureusement égaux à du, dv, dw, ..., car u' est égal à $\frac{du}{dx}$, que dx soit infiniment petit

ou fini : on a donc

$$A\,du + B\,dv + C\,dw + \ldots = 0.$$

Cette égalité était donc rigoureuse.

C. Q. F. D.

Si la quantité $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \ldots + \Omega_m + \varepsilon$ *est d'ordre* $m+1$, Ω_1, Ω_2, ..., Ω_m *étant respectivement d'ordre* 1, 2, ... m, *et* ε *d'ordre* $m+1$, *si* Ω_1, Ω_2, ... *ne contiennent d'autres infiniment petits que des différentielles et sont homogènes par rapport à la lettre* d, *on a*

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_m = 0.$$

En effet, d'après ce que nous venons de voir, on aura $\Omega_1 = 0$ aux termes du second ordre près, et par suite on aura rigoureusement $\Omega_1 = 0$; donc on aura $\Omega_2 = 0$ aux termes du troisième ordre près, et par suite rigoureusement $\Omega_2 = 0$. En continuant ce raisonnement, on voit que l'on aura séparément

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_m = 0.$$

Ces principes sont fondamentaux dans les applications analytiques ou géométriques du Calcul différentiel.

IX. — Remarques au sujet des différentielles totales des différents ordres.

Soient x et y deux variables indépendantes; on a par définition

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy;$$

quand x et y deviennent fonctions de t, la relation précédente a encore lieu, en vertu du théorème des fonctions composées; seulement df, dx, dy n'ont plus le même sens. Ceci s'explique : dans les deux cas, on représente par df l'accroissement que prend f quand x et y prennent des accroissements dx, dy, et la seule différence est que, dans l'un des cas,

dx, dy sont indépendants l'un de l'autre, et que dans l'autre cas $\frac{dy}{dx}$ est égal à $\frac{x'}{y'}$, les dérivées étant prises par rapport à t; les termes du second ordre sont, bien entendu, négligés.

Mais d^2f ne reste plus le même quand dx et dy sont indépendants, ou quand ils sont liés l'un à l'autre. En effet, dans le cas où dx, dy sont indépendants l'un et l'autre, ils sont arbitraires et considérés comme constants; mais, s'ils sont fonctions d'une même variable, ils doivent subir la différentiation relative à cette variable, ainsi l'on a

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy$$

si x et y sont indépendants, et, dans le cas contraire,

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}\,d^2y;$$

si x était variable indépendante, d^2x serait nul, et le terme $\frac{\partial f}{\partial x}\,d^2x$ disparaîtrait.

X. — Des fonctions dont la différentielle est nulle.

Lorsque la différentielle totale d'une fonction est nulle, cette fonction est constante, et cela pour tout l'intervalle où la différentielle reste nulle, pourvu toutefois que la fonction ne soit pas discontinue.

En effet, soit f une fonction des variables x, y, z, ...; si l'on a $df = 0$, on aura aussi

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \ldots = 0,$$

et, dx, dy, dz, ... étant indépendants, il faudra que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \ldots;$$

or la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ est prise en regardant y et z comme des constantes; la formule $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ nous montre alors que f est indépendant de x, mais il peut contenir y et z, qui y sont regardés comme des constantes; l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

a donc pour conséquence

$$f = \text{fonction de } y,\ z,\ \ldots \text{ mais non de } x.$$

Mais, quand à cette formule $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ on adjoint les autres formules (1), on voit que f est indépendant non seulement de x, mais de y, z, ...; donc f n'est pas à proprement parler fonction de ses variables : c'est une *constante*.

EXERCICES ET NOTES.

1. On a

$$F\left(x\frac{d}{dx}\right)x^m = F(m)x^m,$$

F désignant un symbole de fonction entière.

2. Former

$$\left(\frac{d}{dx}x\right)^m \varphi(x).$$

On supposera $\varphi(x)$ quelconque; on verra que le résultat est de la forme $A\varphi'(x) + B\varphi''(x) + \ldots$; on déterminera ensuite A, B, ..., en faisant $\varphi(x) = e^{ax}$ ou $\varphi(x) = x, x^2, \ldots, x^m$.

3. Former

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right)^m \varphi(x).$$

4. On a

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx} - 1\right)\left(x\frac{d}{dx} - 2\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} - n + 1\right)\varphi(x) = x^n\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}.$$

(Boole, *Phil. Transact.*; 1844.)

5. Ψ et Φ désignant des fonctions entières, on a

$$\Psi\left(\frac{d}{dx}+y\right)\Phi(x)=\Phi\left(\frac{d}{dy}+x\right)\Psi(y).$$

(Bronwin, *Cambridge and Dublin math. Journal;* 1848.

6. Soit

$$\mathrm{P}u=\left(x\frac{d}{dx}+y\frac{d}{dy}+z\frac{d}{dz}\right)u;$$

on a, pour une fonction homogène u de degré m,

$$\mathrm{P}u=mu,\quad \mathrm{P}^2u=m(m-1)u,\quad \ldots.$$

7. Considérons une fonction f de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; supposons que l'on ait

$$d^{n+1}f=d^nf(\mathrm{A}_1\,dx_1+\mathrm{A}_2\,dx_2+\ldots+\mathrm{A}_n\,dx_n),$$

c'est-à-dire que $d^{n+1}f$ soit divisible par d^nf; démontrer que $d^{n+2}f$, $d^{n+3}f$, ... seront aussi divisibles par d^nf.

(Darboux, *Bulletin;* 1882.)

CHAPITRE VII.

DES DÉTERMINANTS FONCTIONNELS ET DES FONCTIONS IMPLICITES.

I. — Préliminaires.

Considérons le déterminant

$$\Theta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si l'on désigne par ∂ un signe de différentiation pris en considérant les éléments de ce déterminant comme des variables indépendantes, le symbole

$$\frac{\partial\Theta}{\partial a_{ij}}$$

sera le coefficient de a_{ij} dans le développement du déterminant Θ, de sorte que, en appelant α_{ij} le mineur obtenu en supprimant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne, on aura

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{ij}};$$

de même $\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_{ij}\partial a_{kl}}$ sera le coefficient de $a_{ij}a_{kl}$ dans le développement de Θ, et cette dérivée sera, au signe près, le mineur de Θ obtenu en supprimant la $i^{\text{ième}}$ et la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ et la $l^{\text{ième}}$ colonne.

On voit ainsi que les déterminants mineurs des divers ordres de Θ peuvent être représentés, au signe près, par les

dérivées de ce même déterminant prises par rapport à ses éléments.

THÉORÈME I. — *On a*

$$a_{i1}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{j1}}+a_{i2}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{j2}}+\ldots+a_{in}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{jn}}=\begin{cases}0 \text{ si } i \gtrless j,\\ \Theta \text{ si } i=j;\end{cases}$$

$$a_{1i}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{1j}}+a_{2i}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{2j}}+\ldots+a_{ni}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{nj}}=\begin{cases}0 \text{ si } i \gtrless j,\\ \Theta \text{ si } i=j.\end{cases}$$

THÉORÈME II. — *On a*

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_{ij}\,\partial a_{kl}}=-\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_{il}\,\partial a_{kj}}.$$

En effet, le premier membre représente le déterminant mineur obtenu en effaçant les lignes d'ordre i et k et les colonnes d'ordre j et l; le second également, et cela au signe près. Or, en échangeant dans Θ les colonnes d'ordre j et l, ce déterminant change de signe; $\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_{ij}\,\partial a_{kl}}$, dans ces circonstances, est remplacé par $\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_{il}\,\partial a_{kj}}$: ces deux déterminants sont donc de signes contraires.

THÉORÈME III. — *On a*

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_{ij}\,\partial a_{kj}}=0,\quad \frac{\partial^2\Theta}{\partial a_{ij}\,\partial a_{il}}=0,$$

car Θ contient au premier degré seulement les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne; $a_{ij}a_{kj}$ ne peut donc entrer dans la formation de Θ.

II. — Déterminant du système adjoint.

Conservons les notations précédentes, et posons

$$\frac{\partial\Theta}{\partial a_{ij}}=\alpha_{ij};$$

avec les quantités α_{ij} on peut former un nouveau déterminant

$$\mathrm{H}=\sum\pm\alpha_{11}\,\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn},$$

dont les éléments forment le système adjoint du système des éléments a_{ij} de Θ.

Si l'on fait le produit ΘH, ou

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

en ayant égard à la formule

$$\alpha_{i1} a_{j1} + \alpha_{i2} a_{j2} + \ldots + \alpha_{in} a_{jn} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \lesseqgtr j, \\ \Theta \text{ si } i = j, \end{cases}$$

on trouve pour produit

$$\begin{vmatrix} \Theta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Theta & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \Theta \end{vmatrix} = \Theta^n;$$

donc $\Theta H = \Theta^n$, ou

$$H = \Theta^{n-1}.$$

Considérons en second lieu le produit

$$H \frac{\partial \Theta}{\partial a_{11}} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

effectuant et remplaçant H par Θ^{n-1}, on a

$$\Theta^{n-1} \frac{\partial \Theta}{\partial a_{11}} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ 0 & \Theta & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \Theta \end{vmatrix} = \alpha_{11} \Theta^{n-1};$$

donc

$$\frac{\partial \Theta}{\partial a_{11}} = \alpha_{11},$$

ce que l'on savait déjà. Considérons encore le produit

$$H \frac{\partial^2 \Theta}{\partial a_{11} \partial a_{22}} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

effectuant et remplaçant H par Θ^{n-1}, on a

$$\Theta^{n-1}\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_{11}\partial a_{12}} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{n2} \\ 0 & 0 & \Theta & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \Theta^{n-2}$$

ou bien

$$\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial a_{11}\partial a_{12}} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

On aurait de même

$$\Theta^2\frac{\partial^3\Theta}{\partial a_{11}\partial a_{22}\partial a_{33}} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

et ainsi de suite.

Ces formules en contiennent d'autres plus générales. En effet, si nous considérons par exemple la dernière, et si nous plaçons les lignes d'ordre i, k, p respectivement au premier, au second, au troisième rang, les colonnes d'ordre j, l, q au premier, au second, au troisième rang, Θ n'aura pas changé de valeur, et si l'on applique à la nouvelle forme de Θ la formule précédente, on aura

$$\Theta^2\frac{\partial^3\Theta}{\partial a_{ij}\partial a_{kl}\partial a_{pq}} = \begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{il} & \alpha_{iq} \\ \alpha_{kj} & \alpha_{kl} & \alpha_{kq} \\ \alpha_{pj} & \alpha_{pl} & \alpha_{pq} \end{vmatrix};$$

on aura de même

$$(a)\qquad \Theta^1\frac{\partial^2\Theta}{da_{ij}da_{kl}} = \begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{il} \\ \alpha_{kj} & \alpha_{kl} \end{vmatrix} = \frac{\partial\Theta}{\partial a_{ij}}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{kl}} - \frac{\partial\Theta}{\partial a_{il}}\frac{\partial\Theta}{\partial a_{kj}}$$

et

$$\Theta^0\frac{\partial\Theta}{\partial a_{ij}} = \alpha_{ij} = \frac{\partial\Theta}{\partial a_{ij}}.$$

De ces formules très remarquables, il résulte que, si $\Theta = 0$, tous les déterminants mineurs du système adjoint sont nuls, mais α_{ij} n'est pas nul.

Si, dans la formule (a), on fait $k = j$, $i = l$, on a

$$0 = \alpha_{ij}\alpha_{ji} - \alpha_{ii}\alpha_{jj}.$$

III. — Digression sur les déterminants gauches.

M. Cayley a donné le nom de *déterminants gauches* aux déterminants de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Theta,$$

dans lesquels on a $a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$. Les déterminants gauches jouissent d'une propriété curieuse :

Tout déterminant gauche de degré impair est nul, et tout déterminant gauche de degré pair est un carré parfait.

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur la formule

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial a_{nn} \partial a_{n-1,n-1}} \Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial a_{n,n}} \frac{\partial \Theta}{\partial a_{n-1,n-1}} - \frac{\partial \Theta}{\partial a_{n-1,n}} \frac{\partial \Theta}{\partial a_{n,n-1}},$$

obtenue ne faisant $i = j = n$ et $k = l = n - 1$ dans la formule (a) du paragraphe précédent; si nous admettons que le théorème soit démontré pour des déterminants de degré moindre que n, il est facile alors de voir qu'il a lieu pour les déterminants d'ordre n. En effet $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial a_{nn} \partial a_{n-1,n-1}}$, si n est pair, est un déterminant gauche d'ordre pair qui est un carré, $\frac{\partial \Theta}{\partial a_{nn}}$ est un déterminant gauche d'ordre impair qui est nul; alors, en observant que

$$\frac{\partial \Theta}{\partial a_{n-1,n}} = -\frac{\partial \Theta}{\partial a_{n,n-1}},$$

la formule (1) donne

$$\Theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial a_{nn} \partial a_{n-1,n-1}} = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial a_{n,n-1}} \right)^2;$$

donc Θ doit être un carré parfait.

Si le déterminant gauche est de degré impair, il contient les termes $a_{1\alpha}, a_{2\beta}, \ldots, a_{n\lambda}$ et $a_{\alpha 1}, a_{\beta 2}, \ldots, a_{\lambda n}$, qui se détruisent parce qu'ils sont égaux et de signes contraires s'ils ne sont pas nuls.

Il reste donc à vérifier que, pour $n = 2$, le déterminant Θ est un carré parfait, parce qu'il le sera encore pour $n = 4$, $n = 6$, ... Or on a, pour $n = 1$,

$$\Theta = 0;$$

pour $n = 2$,

$$\Theta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix} = a_{12}^2;$$

pour $n = 3$,

$$\Theta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

pour $n = 4$,

$$\Theta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = (a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} - a_{12}a_{34})^2;$$

et ainsi de suite.

Remarque. — Un déterminant gauche de degré pair et dont tous les éléments situés d'un même côté de la diagonale sont égaux à l'unité est égal à 1.

La racine carrée d'un déterminant gauche de degré pair est ce que l'on a appelé un *pfaffien*.

IV. — Déterminant d'un système de fonctions.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des fonctions des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on appelle *déterminant* de ce système de

fonctions (ou *jacobien*) le déterminant

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

dont les éléments sont leurs dérivées, et on le représente par la notation

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

dont l'utilité ne tardera pas à être mise en lumière.

Quand $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont les dérivées d'une même fonction u, le déterminant fonctionnel porte le nom de *hessien* de la fonction u, et on le représente souvent au moyen de la notation $\mathrm{H}.u$.

Théorème de M. Bertrand. — *Le déterminant d'un système de fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est le rapport du déterminant du système d'accroissements que prennent ces fonctions au determinant du système correspondant d'accroissements infiniment petits des variables.*

En sorte que $\partial(x_1, \ldots, x_n)$ peut être considéré comme un déterminant de n systèmes d'accroissements arbitraires donnés aux variables, et alors $\partial(u_1, \ldots, u_n)$ est, aux termes d'ordre supérieur près, le déterminant du système d'accroissements correspondants des fonctions $u_1, \ldots, u_n$.

Pour démontrer ce théorème, désignons par $d_1x_1, d_1x_2, \ldots, d_1x_n$ un premier système d'accroissements des variables; par $d_2x_1, d_2x_2, \ldots, d_2x_n$ un second système, etc.; multiplions entre eux les déterminants (1) et

$$\begin{vmatrix} d_1 x_1 & d_2 x_2 & \ldots & d_1 x_n \\ d_2 x_1 & d_2 x_2 & \ldots & d_2 x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_n x_1 & d_n x_2 & \ldots & d_n x_n \end{vmatrix};$$

l'élément appartenant à la $i^{\text{ième}}$ ligne et à la $j^{\text{ième}}$ colonne du produit sera

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} d_j x_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} d_j x_2 + \ldots + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} d_j x_n,$$

c'est-à-dire $d_j u_i$; le produit est donc le déterminant du système des différentielles ou des accroissements des fonctions; d'où l'on conclut le théorème énoncé.

Le théorème de M. Bertrand a un grand nombre de corollaires importants qui ont été démontrés directement par Jacobi ou par Cauchy. Mais, en les déduisant du théorème de M. Bertrand, on développe plus clairement les analogies des déterminants fonctionnels avec les dérivées. Voici, par exemple, comment il permet de généraliser le théorème des fonctions de fonctions.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on pourra considérer $u_1, u_2, \ldots, u_n$ comme fonctions composées de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, et il est clair que l'on aura

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots u_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots y_n)} \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)};$$

en particulier, si l'on a $u_1 = x_1$, $u_2 = x_2$, ... on voit que

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots y_n)} \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 1,$$

théorème analogue à celui qui est compris dans la formule

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = 1,$$

et qui devient évident par l'emploi de la notation différentielle.

On peut également donner une généralisation du théorème des fonctions composées ou même de la différentielle totale.

Considérons, en effet, n fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de m variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$, le nombre n des fonc-

tions étant supposé moindre que le nombre m des variables; donnons aux variables n systèmes d'accroissements infiniment petits. Soient $d(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $d(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$, ... les déterminants que l'on peut former avec ces systèmes d'accroissements; soit $d(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ le déterminant du système d'accroissements que prennent les fonctions dans ces circonstances. Comme l'on a

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} dx_n,$$

quels que soient $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, la quantité $d(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ sera une somme de produits de déterminants formés avec les accroissements dx et avec les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, en sorte que

$$d(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda)} d(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda),$$

le signe $\sum$ se rapportant aux indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Si, en particulier, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ étaient des fonctions de n variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$, on aurait

$$\frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{d(t_1, t_2, \ldots, t_n)} = \sum \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda)} \frac{d(x_\alpha, \ldots, x_\lambda)}{d(t_1, t_2, \ldots, t_n)},$$

théorème analogue à celui des fonctions composées.

Remarque. — Si l'on avait supposé $m < n$, on aurait eu $d(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$; nous retrouverons ce résultat sous une autre forme : il exprime que, si les fonctions $u_1, \ldots, u_n$ de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ peuvent être exprimées au moyen de $m < n$ variables $x_1, \ldots, x_m$, leur déterminant est nul. En d'autres termes, si les fonctions $u_1, \ldots, u_n$ ne sont pas indépendantes, c'est-à-dire peuvent s'exprimer les unes en fonction des autres, leur déterminant sera nul.

V. — Reconnaître si des fonctions sont indépendantes les unes des autres.

Quand deux fonctions de plusieurs variables u_1 et u_2 ont leurs dérivées proportionnelles, ou, ce qui revient au même, satisfont à une relation de la forme

$$du_1 = k\,du_2,$$

elles dépendent l'une de l'autre; en d'autres termes, u_1 peut s'exprimer en fonction de u_2 seul; et en effet, du_1 et du_2 sont nuls en même temps : u_1 et u_2 sont donc constants en même temps, et par suite sont fonctions l'un de l'autre; la réciproque est évidente.

Si l'on considère maintenant un nombre quelconque de fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$, pour que ces fonctions ne soient pas *distinctes*, c'est-à-dire pour qu'un certain nombre d'entre elles soient fonctions des autres, il faut et il suffit qu'il existe des identités de la forme

$$k_1\,du_1 + k_2\,du_2 + \ldots + k_n\,du_n = 0.$$

Il est bien clair, en effet, 1° que toute relation

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

différentiée donnera un résultat de cette forme; 2° qu'une relation de cette forme ayant lieu, du_1, par exemple, sera nul quand $du_2, \ldots, du_n$ le seront, et par suite u_1 sera constant quand $u_2, \ldots, u_n$ le seront; en d'autres termes, u_1 sera fonction de $u_2, \ldots, u_n$.

Plus généralement : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe m relations entre des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$, c'est qu'il existe m relations linéaires et homogènes entre les différentielles de ces fonctions.*

En effet, s'il existe m relations telles que

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0,$$

on aura, entre du_1, du_2, ..., les m relations linéaires et homogènes

$$\frac{\partial F_1}{\partial u^1} du_1 + \frac{\partial F_1}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial u_n} du_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial F_m}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F_m}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial u_n} du_n = 0;$$

réciproquement, s'il existe m relations linéaires et homogènes entre $du_1, du_2, \ldots, du_n$, telles que

$$a_1\, du_1 + a_2\, du_2 + \ldots + a_n\, du_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l_1\, du_1 + l_2\, du_2 + \ldots + l_n\, du_n = 0,$$

$a_1, \ldots, l_1, \ldots, l_n$ désignant des quantités quelconques, on pourra de ces équations tirer du_1, du_2, ..., du_m en fonctions linéaires et homogènes de $du_{m+1}, \ldots, du_n$, et l'on voit que $du_1, \ldots, du_m$ seront nuls si $du_{m+1}, \ldots, du_n$ le sont; donc $u_1, \ldots, u_m$ seront constants si $u_{m+1}, \ldots, u_n$ le sont; donc enfin $u_1, \ldots, u_m$ seront fonctions de $u_{m+1}, \ldots, u_n$.

C. Q. F. D.

Ce raisonnement suppose, bien entendu, les relations homogènes données, telles que l'on puisse en tirer m différentielles en fonction des autres.

On peut encore reconnaître s'il existe des relations entre des fonctions données, au moyen des théorèmes suivants, au fond identiques au précédent :

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'entre n fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ il existe m relations distinctes, est que le déterminant*

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul, ainsi que tous ses mineurs jusqu'à ceux de l'ordre $m-1$ inclusivement.

En effet, si entre $u_1, u_2, \ldots, u_n$ il existe m relations, m de ces quantités resteront constantes quand les $n-m$ autres seront rendues constantes; donc m des équations

$$du_1 = 0, \quad du_2 = 0, \quad \ldots, \quad du_n = 0$$

seront des conséquences des $n-m$ autres; en d'autres termes, ces n équations se réduiront à $n-m$ distinctes; or elles peuvent s'écrire

$$(a) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} dx_n = 0; \end{array} \right.$$

pour qu'elles se réduisent à $n-m$ distinctes, il faut que le déterminant

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \mathrm{D}$$

soit nul, ainsi que ses mineurs jusqu'à l'ordre $m-1$ inclusivement. Ainsi, en particulier, s'il n'existe qu'une relation entre les u, on devra avoir $\mathrm{D} = 0$ seulement.

Réciproquement, si D est nul, ainsi que les mineurs jusqu'à ceux de l'ordre $m-1$ inclusivement, les équations (a) se réduiront à $n-m$ distinctes; en d'autres termes, m des équations $du_1 = 0$, $du_2 = 0$, ... seront des conséquences des autres, et par suite, $m-n$ des quantités u restant constantes, les m autres restent constantes aussi et sont des fonctions de celles-ci. C. Q. F. D.

Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'entre m fonctions de n variables, m étant plus petit que n, il existe une relation au moins entre ces fonctions, c'est que tous les déterminants fonctionnels de ces*

fonctions par rapport à m quelconques des variables soient nuls.

Soient, en effet, m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ des $n > m$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; on devra avoir entre les différentielles $du_1, du_2, \ldots$ une relation telle que

$$A_1\,du_1 + A_2\,du_2 + \ldots + A_m\,du_m = 0,$$

ou

$$\left(A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \ldots + A_m \frac{\partial u_m}{\partial x_m}\right) dx_1 + \left(A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \ldots\right) dx_2 + \ldots = 0,$$

quels que soient $dx_1, dx_2, \ldots$; donc

$$A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \ldots + A_m \frac{\partial u_m}{\partial x_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + A_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \ldots + A_m \frac{\partial u_m}{\partial x_n} = 0;$$

comme $A_1, A_2, \ldots$ ne sont pas tous nuls, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_m)}{\partial(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda)} = 0,$$

quels que soient les indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. Réciproquement, si toutes ces relations ont lieu, on aura

$$\frac{d(u_1, u_2, \ldots, u_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots, \alpha_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots x_n)} = 0,$$

$\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ désignant des constantes; il existera donc une relation entre $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et des constantes, c'est-à-dire entre $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

C. Q. F. D.

VI. — Sur un théorème de Jacobi.

Dans son Mémoire *Sur les déterminants fonctionnels,* déjà cité, Jacobi est parvenu à mettre sous une forme remarquable le déterminant de plusieurs fonctions; cette forme a d'ailleurs

été utilisée par lui dans une circonstance importante. Voici comment on y parvient :

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indépendantes; imaginons que l'on ait exprimé u_1 en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; u_2 en fonction de $u_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; u_3 en fonction de $u_1, u_2, x_3, \ldots, x_n$, etc.; enfin u_n en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, x_n$; nous représenterons par un d les dérivées prises dans les hypothèses dont nous venons de parler, en réservant le ∂ pour représenter les dérivées prises en regardant $x_1, x_2, \ldots x_n$ comme seules variables indépendantes.

On a

$$(1) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{du_1}{dx_1}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{du_1}{dx_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_n} = \frac{du_1}{dx_n},$$

et ensuite

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{du_2}{du_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{du_2}{dx_2} + \frac{du_2}{du_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

mais, $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \cdots$ étant remplacés par leurs valeurs (1), il vient

$$(2) \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{du_2}{du_1}\frac{du_1}{dx_2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{du_2}{dx_2} + \frac{du_2}{du_1}\frac{du_1}{dx_2}, \quad \ldots;$$

et ensuite

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{du_3}{du_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{du_3}{dx_3} + \frac{du_3}{du_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{du_3}{du_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \ldots;$$

or $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{du_1}{dx_1}$, et de même $\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{du_2}{dx_3}$, car ces deux dérivées sont prises en faisant seulement varier x_3, u_1 ne variant pas et par suite n'étant pas fonction de x_3; on a donc

$$(3) \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{du_3}{du_1}\frac{du_1}{dx_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{du_3}{dx_3} + \frac{du_3}{du_1}\frac{du_1}{dx_3} + \frac{du_3}{du_2}\frac{du_2}{du_3}, \quad \ldots.$$

Il résulte de là que le déterminant des dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, ou

$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, est le produit de deux autres :

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{dx_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{du_1}{dx_2} & \frac{du_2}{dx_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{du_1}{dx_n} & \frac{du_2}{dx_n} & \ldots & \ldots & \frac{du_n}{dx_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{du_2}{du_1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{du_3}{du_1} & \frac{du_3}{du_2} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \frac{du_n}{du_1} & \frac{du_n}{du_2} & \ldots & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, en effectuant,

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{du_1}{dx_1} \frac{du_2}{dx_2} \frac{du_3}{dx_3} \cdots \frac{du_n}{dx_n}.$$

VII. — Définition des fonctions implicites.

On appelle *fonction implicite* toute fonction définie par une ou plusieurs équations non résolues ; ainsi, si l'on pose

$$f(x, y) = 0,$$

on pourra en général en conclure que y est une fonction de x, si cette équation admet une solution, et alors y sera une fonction implicite de x.

Si les équations

$$\varphi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

admettent pour différentes valeurs de x des solutions y_1, $y_2, \ldots, y_n$, ces solutions seront en général des fonctions de x dites implicites.

VIII. — Dérivées et différentielles des fonctions implicites définies par une seule équation.

Théorème. — *Soit $f(x, y)$ une fonction continue de x et de y pour les valeurs de ces variables voisines de x_0 et y_0,*

ainsi que ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f_2$, *l'équation*

$$f(x, y) = 0,$$

supposée satisfaite pour $x = x_0$, $y = y_0$, *définira une fonction* y *implicite de* x, *qui, pour* $x = x_0$, *sera continue et aura une dérivée bien déterminée pourvu que* $f_2(x_0, y_0)$ *ne soit pas nul.*

En effet, soit k une quantité très petite et positive; on aura

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = k f_2(x_0, y_0 + \theta k),$$

θ désignant un nombre compris entre 0 et 1, et, comme $f(x_0, y_0)$ est nul par hypothèse, on aura

$$f(x_0, y_0 + k) = k f_2(x_0, y_0 + \theta k),$$

de même

$$f(x_0, y_0 - k) = -k f_2(x_0, y_0 - \theta' k);$$

si k est assez petit, $f_2(x_0, y_0 + \theta k)$ et $f_2(x_0, y_0 - \theta' k)$ seront de mêmes signes que $f_2(x_0, y_0)$, qui n'est pas nul; donc, en vertu des deux formules précédentes, $f(x_0, y_0 + k)$ et $f(x_0, y_0 - k)$ seront de signes contraires. Mais on peut maintenant prendre h assez petit pour que $f(x_0 + h, y_0 - k)$ soit de même signe que $f(x_0, y_0 - k)$, et que $f(x_0 + h, y_0 + k)$ soit de même signe que $f(x_0, y_0 + k)$; alors $f(x_0 + h, y_0 - k)$ et $f(x_0 + h, y_0 + k)$ seront de signes contraires, et il y aura une valeur k_1, comprise entre $+k$ et $-k$, telle que

$$f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0;$$

donc, à un accroissement h suffisamment petit h de x correspondra un accroissement aussi petit que l'on voudra de y. Cela posé, en admettant, ce qui est permis maintenant, que h et k soient infiniment petits, on aura

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = 0.$$

ou, en observant que $f(x_0, y_0) = 0$ en vertu de la formule de Taylor,

$$h f_1(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k f_2(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = 0.$$

On tire de là

$$\frac{k}{h} = -\frac{f_1(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}{f_2(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)};$$

faisant tendre h et k vers zéro, si $f_2(x_0, y_0)$ n'est pas nul, on a

$$\lim \frac{k}{h} = -\frac{f_1(x_0, y_0)}{f_2(x_0, y_0)} = \frac{dy}{dx} \text{ pour } x = x_0;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — On aurait pu arriver plus directement au résultat précédent si l'on avait su à l'avance que y avait une dérivée; il suffisait pour cela d'observer que l'équation

$$f(x, y) = 0$$

a lieu identiquement quand y est remplacé par sa valeur en x déduite de cette équation même qui sert à le définir; en différentiant alors cette équation identique et en considérant f comme fonction composée de x et y, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y},$$

ce qui s'accorde avec le résultat obtenu tout à l'heure.

Nous n'avons pas à examiner ce qui arrive quand $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $f_2(x_0, y_0)$ est nul, parce que $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne saurait être nul qu'accidentellement; si en effet $\frac{\partial f}{\partial y}$ était toujours nul, f ne contiendrait pas y, et $f = 0$ ne saurait définir une fonction de y; le cas où $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ doit être considéré comme un cas limite, et l'on peut dire que y a alors une dérivée infinie.

IX. — Dérivées et différentielles des fonctions implicites définies par plusieurs équations.

Théorème. — *Soient* $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n), \chi(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ *n fonctions continues de* $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ *dans le voisinage des valeurs particulières des variables* $x = x^0, y_1 = y_1^0, \ldots, y_n = y_n^0$, *ainsi que leurs dérivées relatives à ces variables; les équations supposées satisfaites pour* $x = x^0, y_1 = y_1^0, \ldots$

$$\varphi = 0, \quad \chi = 0, \quad \ldots, \quad \psi = 0, \tag{1}$$

définissent des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *implicites, mais continues de* x, *possédant des dérivées bien déterminées pourvu que l'on n'ait pas*

$$\frac{\partial(\varphi, \chi, \ldots, \psi)}{\partial(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)} = 0.$$

Pour démontrer ce théorème, déjà établi dans le cas d'une seule équation, nous admettrons qu'il a lieu pour $n - 1$ fonctions définies par $n - 1$ équations, et nous l'étendrons au cas où l'on considère n fonctions définies par n équations. Si alors des $n - 1$ dernières équations (1) on tire $y_2, y_3, \ldots, y_n$ pour les porter dans $\varphi = 0$, φ deviendra une fonction continue de x possédant une dérivée, puisque l'on a admis que $y_2, y_3, \ldots, y_n$ tirés de $n - 1$ équations étaient fonctions continues de x, et pour la même raison de y_1; de plus, ces fonctions possèdent des dérivées.

En considérant l'équation $\varphi = 0$ à ce point de vue, la fonction φ sera fonction composée de x et de y, et l'on en déduira la dérivée de y, par le procédé indiqué au paragraphe précédent, c'est-à-dire que l'on différentiera $\varphi = 0$, et l'on aura

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)\frac{dy_1}{dx} = 0,$$

les parenthèses indiquant qu'il s'agit de dérivées totales prises

en faisant varier $y_2, y_3, \ldots$. La dérivée $\frac{dy_1}{dx}$ ne pourrait cesser d'exister que si l'on avait $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right) = 0$; or on a

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_3}\frac{\partial y_3}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y_1};$$

mais les équations $\chi = 0, \ldots, \psi = 0$ différentiées par rapport à y_1 donnent

$$0 = \frac{\partial\chi}{\partial y_1} + \frac{\partial\chi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial\chi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial y_1} + \frac{\partial\psi}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial y_1};$$

on tire de là, en éliminant $\frac{\partial y_2}{\partial y_1}, \frac{\partial y_3}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial y_1}$,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right) = \frac{\partial(\varphi, \chi, \ldots, \psi)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} : \frac{\partial(\chi, \ldots, \psi)}{\partial(y_2, \ldots, y_n)};$$

donc $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)$ ne saurait être nul, sans quoi le déterminant fonctionnel suivant serait nul, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Quoi qu'il en soit, ce déterminant pourra être accidentellement nul, et $\frac{dy_1}{dx}$ sera alors infini, ou indéterminé.

L'existence de la dérivée étant établie, on la trouvera comme il suit : on différentiera les équations (1), en considérant $\varphi, \chi, \ldots, \psi$ comme des fonctions composées de x identiquement nulles, et alors on aura

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n}dy_n = 0, \\ \frac{\partial\chi}{\partial x}dx + \frac{\partial\chi}{y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial\chi}{\partial y_n}dy_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y_n}dy_n = 0; \end{cases}$$

on en déduit les valeurs de $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, $\cdots$; ainsi l'on a, par exemple,

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{\partial(\varphi,\chi,\ldots,\psi)}{\partial(x_1,y_2,\ldots,y_n)} : \frac{\partial(\varphi,\chi,\ldots,\psi)}{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}.$$

En différentiant encore les équations (2), on introduirait les quantités d^2y_1, d^2y_2, $\ldots$, d^2y_n et l'on aurait n nouvelles équations pour déterminer ces différentielles en fonction de dy_1, dy_2, $\ldots$, dy_n; etc.

X. — Caractère des solutions multiples.

Considérons un système d'équations

$$(1) \qquad \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0$$

entre n inconnues, contenant un paramètre variable t; supposons ces équations satisfaites pour $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, $\ldots$, $t = \tau$. Quand on changera τ en $\tau + \delta t$, ξ_1, ξ_2, $\ldots$ deviendront $\xi_1 + \delta x_1$, $\xi_2 + \delta x_2$, $\ldots$, et l'on aura

$$\varphi_i(\xi_1 + \delta x, \ldots, \xi_2 + \delta x_2, \ldots, \tau + \delta t) = 0,$$

ou, en vertu de la formule de Taylor,

$$(2) \qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_i}\,\delta x_1 + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_2}\,\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau}\,\delta t + \varepsilon_i = 0,$$

ε désignant des termes du second ordre. Si l'on divise par δt et si l'on fait $\delta t = 0$, ces équations fourniront les dérivées x'_1, x'_2, $\ldots$ de x_1, x_2, $\ldots$ relatives à t pour $t = \tau$, et, en posant

$$\Delta = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)},$$

on aura

$$x'_i = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_i}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} + \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_i}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau} + \ldots\right].$$

Cela n'aura plus lieu si $\Delta = 0$. Supposons donc que $\Delta = 0$

sans autre condition; en multipliant (2) par $\frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_1}}$, en faisant $i = 1, 2, 3, \ldots$ et ajoutant les résultats, on a

$$(3)\qquad \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\,\delta t + \varepsilon_1\right) + \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1}}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}\,\delta t + \varepsilon_2\right) + \ldots = 0.$$

1° En général, le coefficient de δt est différent de zéro; alors δt est du même ordre que les carrés et les produits de $\delta x_1, \delta x_2, \ldots$; l'équation (3) peut remplacer l'une des équations (2); de $n-1$ de ces équations on pourra tirer δx_2, $\delta x_3, \ldots, \delta x_n$ en fonction de δx_1, et, en portant ces valeurs dans (3), cette équation, en négligeant les termes du troisième ordre, fera connaître deux petites valeurs de δx_1, en fonction de δt, ou plutôt deux valeurs des rapports $\frac{\delta x_1}{\sqrt{\delta t}}$ pour $\delta t = 0$; donc, quand on aura $\Delta = 0$, deux solutions des équations (1) seront venues en général se confondre en une seule, ou en *une solution double* des équations (1).

2° Le coefficient de δt dans (3) pourra être nul; tout se passera comme auparavant, à cela près que les δx seront de l'ordre de δt.

Maintenant, si Δ est nul ainsi que ses mineurs du premier ordre, on pourra des $n-2$ premières équations (2) tirer $\delta x_3, \delta x_4, \ldots, \delta x_n$ en fonction de δx_1 et δx_2, en les considérant comme équations du premier degré, et porter leurs valeurs dans les équations obtenues en ajoutant (2) après les avoir multipliées par les déterminants mineurs du second ordre de Δ qui éliminent les δx. Les rapports

$$\frac{\delta x_1}{\delta t},\ \frac{\delta x_2}{\delta t}\quad \text{ou}\quad \frac{\delta x_1}{\sqrt{\delta t}},\ \frac{\delta x_2}{\sqrt{\delta t}}$$

seront alors racines d'équations que l'on pourra, pour de très petites valeurs de δt, réduire au second degré. En continuant le raisonnement, on voit que $\Delta = 0$ est l'indice que plusieurs solutions sont venues se confondre : *il y a solution multiple*. C'est ce qui explique pourquoi la méthode des fonctions implicites tombe en défaut.

XI. — Sur les déterminants des fonctions implicites.

Considérons les équations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0,$$

entre les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$; au lieu de calculer séparément les $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, on peut se proposer de calculer le déterminant

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Pour y parvenir, on différentie l'équation $f_i = 0$ par rapport à x, et l'on a

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j} = 0,$$

d'où l'on tire

$$-\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}.$$

Cette équation et les analogues montrent, par l'application de la règle de la multiplication des déterminants, que l'on a

$$(-1)^n \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} : \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

formule analogue à celle qui fournit la dérivée de la fonction y définie par l'équation unique

$$f(x, y) = 0.$$

XII. — Formule de Lagrange.

Nous allons appliquer les considérations précédentes à la démonstration d'une formule célèbre donnée par Lagrange.

Cette formule a pour but de fournir les éléments du calcul d'une racine de l'équation

$$z = x + t f(z), \tag{1}$$

dans laquelle z est l'inconnue. Pour trouver la racine z, on peut la développer par la formule de Taylor, en la considérant comme une fonction implicite de t. On a

$$\frac{dz}{dt} = t f'(z) \frac{dz}{dt} + f(z); \tag{2}$$

cette équation donne

$$\frac{dz}{dt} = \frac{f(z)}{1 - t f'(z)}. \tag{3}$$

En différentiant encore l'équation (2), on introduirait $\frac{d^2 z}{dt^2}$ que l'on pourrait calculer; mais en continuant ainsi il paraît difficile d'obtenir la loi de formation des dérivées de z; on obtient une formule plus élégante en introduisant dans la question, comme l'a fait Lagrange, les dérivées de z relatives à x. En différentiant (1) par rapport à x, on a

$$\frac{dz}{dx} = t f'(z) \frac{dz}{dx} + 1,$$

ou

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1 - t f'(z)};$$

la comparaison de cette formule avec (3) donne

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} f(z), \tag{4}$$

de sorte que, pour différentier z relativement à t, on peut se borner à différentier par rapport à x et à multiplier le résultat par $f(z)$. Cette formule peut se généraliser et il est facile de voir que

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi(z)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\varphi(z)\frac{dz}{dt}\right],$$

ce qui se vérifie en effectuant les différentiations indiquées. On a en effet

$$\varphi'(z)\frac{dz}{dt}\,\frac{dz}{dx} + \varphi(z)\frac{d^2 z}{dx\,dt}$$

pour la valeur de chacun des deux membres de la formule précédente. En appliquant cette remarque à l'équation (4), on a

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[f(z)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[f(z)\frac{dz}{dt}\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[f^2(z)\frac{dz}{dx}\right].$$

En différentiant de nouveau, on a

$$\frac{d^3 z}{dt^3} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dt}\left[f^2(z)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d^2}{dx^2}\left[f^2(z)\frac{dz}{dt}\right]$$
$$= \frac{d^2}{dx^2}\left[f^3(z)\frac{dz}{dx}\right],$$

et enfin

$$(5) \qquad \frac{d^n z}{dt^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[f^n(z)\frac{dz}{dx}\right].$$

Pour $t = 0$, cette formule devient

$$\frac{d^n z}{dt^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[f^n(x)].$$

La formule de Taylor donne alors

$$(6) \quad z = x + t f(x) + \frac{t^2}{1.2}\frac{d}{dx}[f^2(x)] + \frac{t^3}{1.2.3}\frac{d^2}{dx^2}[f^3(x)] + \ldots;$$

bien entendu, cette formule doit être complétée par le reste

$$\frac{t^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[f^n(z)\frac{dz}{dt}\right],$$

où l'on doit remplacer t par θt. Quoi qu'il en soit, il ne sera pas nécessaire en général de calculer ce reste, et, si t est petit, on pourra faire usage des termes de la formule (6), sauf à vérifier que l'équation (1) est satisfaite.

Si l'on appliquait la méthode d'approximation de Newton à l'équation (1), en prenant x pour première valeur approchée de z, on aurait pour terme de correction $\frac{t f(x)}{1 - t f'(x)}$, ou, en supposant t très petit,

$$t f(x)[1 + t f'(x) + t^2 f'^2(x) + \ldots],$$

ou enfin

$$t f(x) + \frac{t^2}{2} \frac{d}{dx} f^2(x) + \dots.$$

Employer la formule de Newton, c'est donc employer les deux premiers termes de la formule (6).

La formule (6) n'est qu'un cas particulier de la formule de Lagrange, qui donne le développement d'une fonction quelconque $\Pi(z)$ de la racine.

On trouve cette formule en calculant $\frac{d^n}{dt^n}\Pi(z)$; on a, en ayant égard à (4),

$$\frac{d\Pi(z)}{dt} = \Pi'(z)\frac{dz}{dt} = \Pi'(z)\frac{dz}{dx}f(z).$$

$$\frac{d^2\Pi(z)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\Pi'(z)f(z)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\Pi'(z)f(z)\frac{dz}{dt}\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\Pi'(z)f^2(z)\frac{dz}{dx}\right],$$

et, en général,

$$\frac{d^n\Pi(z)}{dt^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\Pi'(z)f^n(z)\frac{dz}{dx}\right].$$

Pour $t = 0$, on a

$$\frac{d^n\Pi(z)}{dt^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\Pi'(x)f^n(x)\right];$$

la formule de Maclaurin donne alors

$$\Pi(z) = \Pi(x) + t[\Pi'(x)f(x)] + \frac{t^2}{1.2}\frac{d}{dx}[\Pi'(x)f^2(x)] + \dots.$$

Nous retrouverons ces formules plus loin en leur donnant une précision plus grande. Nous n'en ferons pas d'applications en ce moment, notre but ayant été de donner surtout un bel exemple de différentiation des fonctions implicites.

EXERCICES ET NOTES.

1. Si l'on pose

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos\varphi_1,\\
x_2 &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2,\\
x_3 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-1} \cos\varphi_n,
\end{aligned}$$

on aura

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)} = \sin^n\varphi_1 \sin^{n-1}\varphi_2 \ldots \sin^2\varphi_{n-1} \sin\varphi_n.$$

(Jacobi.)

2. Si l'on a

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{a_1+\lambda_1} + \frac{x_2}{a_2+\lambda_1} + \ldots + \frac{x_n}{a_n+\lambda_1} &= 1,\\
\frac{x_1}{a_1+\lambda_2} + \frac{x_2}{a_2+\lambda_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n+\lambda_2} &= 1,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
\frac{x_1}{a_1+\lambda_n} + \frac{x_2}{a_2+\lambda_n} + \ldots + \frac{x_n}{a_n+\lambda_n} &= 1,
\end{aligned}$$

on aura

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)} = \frac{A\Lambda}{P},$$

A désignant le produit des différences que l'on peut former avec les quantités a, Λ le produit des différences que l'on peut former avec les quantités λ, et P le produit des quantités $a_i + \lambda_j$.

3. Si l'on pose

$$x = a\varepsilon\cos\psi\sin\theta, \quad y = b\varepsilon\sin\psi\sin\theta, \quad z = c\varepsilon\cos\theta,$$

on a

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varepsilon, \theta, \psi)} = abc\varepsilon\sin\theta.$$

4. Si l'on a

$$\begin{vmatrix}
x_1 & x_2 & \ldots & x_n\\
dx_1 & dx_2 & \ldots & dx_n\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
d^{n-1}x_1 & d^{n-2}x_2 & \ldots & d^{n-1}x_n
\end{vmatrix} = 0,$$

on a nécessairement, entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$, une relation de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignant des constantes.

5. Trouver les dérivées des fonctions $y_1, y_2, \ldots$ données par les formules

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \ldots + y_n &= x, \\ y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 &= x^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ y_1^n + y_2^n + \ldots + y_n^n &= x^n. \end{aligned}$$

6. Trouver les dérivées de y et z données par les formules

$$\begin{aligned} y^z + z^y &= x, \\ x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

CHAPITRE VIII.

DES FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES.

LEURS DÉRIVÉES ET LEURS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Définition précise d'une fonction de variable imaginaire.

Soient $z = x + y\sqrt{-1}$ une variable imaginaire, X et Y deux fonctions de x et y; $X + Y\sqrt{-1}$ sera une fonction de $x + y\sqrt{-1}$; toutefois, on ne considère en Analyse que les fonctions ayant une dérivée bien déterminée. Cauchy appelait ces fonctions *monogènes*. Pour que la fonction $X + Y\sqrt{-1}$ admette une dérivée bien déterminée, il faut que les fonctions X et Y satisfassent à certaines conditions que nous allons chercher.

La dérivée de $X + Y\sqrt{-1}$ est la limite du rapport de l'accroissement de $X + Y\sqrt{-1}$ à l'accroissement correspondant $dx + dy\sqrt{-1}$ de sa variable, quand dx et dy tendent vers zéro. La dérivée cherchée peut donc se mettre sous la forme

$$\lim \frac{\Delta X + \Delta Y\sqrt{-1}}{dx + dy\sqrt{-1}} \quad \text{pour} \quad dx = 0, \quad dy = 0.$$

Si l'on néglige des termes du second ordre, on trouve pour cette limite

$$\frac{dX + dY\sqrt{-1}}{dx + dy\sqrt{-1}},$$

ou

$$\frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}dx + \dfrac{\partial Y}{\partial y}dy + \sqrt{-1}\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}dx + \dfrac{\partial Y}{\partial y}dy\right)}{dx + dy\sqrt{-1}}.$$

Cette dérivée dépend du rapport $\frac{dy}{dx}$ et par suite elle est indé-

terminée en général. Pour qu'elle ne soit pas indéterminée, ou pour qu'elle ne dépende plus du rapport $\frac{dy}{dx}$, il faut et il suffit que

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial Y}{\partial x}\right) : 1 = \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right) : \sqrt{-1},$$

ou que l'on ait à la fois en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Telles sont les relations nécessaires et suffisantes pour que $X + Y\sqrt{-1}$ ait une dérivée; dans ce cas, d'ailleurs, la dérivée est égale à l'une quelconque des deux expressions

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial Y}{\partial y}\right) : \sqrt{-1};$$

plus généralement la dérivée est égale à

$$\frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial Y}{\partial y}\,dy + \sqrt{-1}\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial Y}{\partial y}\,dy\right)}{dx + dy\sqrt{-1}},$$

quel que soit le rapport $\frac{dy}{dx}$. On peut donc supposer y et x fonctions de t et dire que la dérivée est égale à

$$\frac{\dfrac{\partial X}{\partial x}\,x' + \dfrac{\partial X}{\partial y}\,y' + \sqrt{-1}\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}\,x' + \dfrac{\partial Y}{\partial y}\,y'\right)}{x' + y'\sqrt{-1}},$$

x' et y' désignant les dérivées de x et y relatives à t, ce que l'on peut écrire

$$\frac{\dfrac{dX}{dt} + \dfrac{dY}{dt}\sqrt{-1}}{x' + y'\sqrt{-1}}.$$

§ II. — Calcul de quelques dérivées.

Les règles données pour prendre les dérivées d'une somme d'un produit, d'un quotient d'une puissance, d'une fonction

de fonction, quand la variable est réelle, s'appliquent au cas où la variable est imaginaire; les démonstrations que nous avons données ne supposent nullement la variable réelle : elles supposent seulement que les dérivées des fonctions sur lesquelles on raisonne existent, à l'exception de la dérivée cherchée.

Nous aurons à revenir sur la dérivée des fonctions composées et sur celle des fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$ et $\log x$.

On a

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y),$$

$$d.e^{x+y\sqrt{-1}} = \left[e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)\,dx + e^x(-\sin y + \sqrt{-1}\cos y)\,dy\right]$$

$$= e^{x+y\sqrt{-1}}\left(dx + dy\sqrt{-1}\right);$$

on a donc, quel que soit $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{d.e^{x+y\sqrt{-1}}}{dx + dy\sqrt{-1}} = e^{x+y\sqrt{-1}}.$$

Donc la dérivée de e^x est e^x lors même que x est imaginaire.

On a

$$\log(x + y\sqrt{-1}) = \log\sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\sqrt{-1},$$

$$d\log(x + y\sqrt{-1}) = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\sqrt{-1}$$

$$= \frac{(dx + dy\sqrt{-1})(x - y\sqrt{-1})}{x^2 + y^2} = \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{x + y\sqrt{-1}};$$

donc $\frac{d\log(x + y\sqrt{-1})}{dx + dy\sqrt{-1}}$ est indépendant de $\frac{dy}{dx}$ et a pour valeur

$$\frac{1}{x + y\sqrt{-1}}.$$

Pour trouver la dérivée de $\cos x$, on observe que

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2};$$

par suite,

$$\frac{d\cos x}{dx} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\sqrt{-1} = -\sin x.$$

On trouverait d'une façon analogue la dérivée de $\sin x$, de $\tang x$, ... qui sont monogènes. On en déduira facilement celles des fonctions inverses, $\arc\sin x$, $\arc\cos x$, ...

Quoique la fonction a^x soit peu usitée, si l'on veut en prendre la dérivée, on l'écrira sous la forme $e^{x\log a}$ et sa dérivée sera $\log a\, e^{x\log a}$ ou $a^x \log a$.

La dérivée de x^m se déduit immédiatement de celle de $\log x$, comme dans le cas où la variable x est réelle.

Avant de chercher la dérivée d'une fonction composée, nous reprendrons la formule de Taylor et nous essayerons de la démontrer pour le cas où la variable est imaginaire.

§ III. — Formule de Taylor.

La formule de Taylor s'applique aux fonctions de variables imaginaires, lorsqu'on les suppose *monogènes*. Soit $X + Y\sqrt{-1}$ une fonction monogène; sa dérivée

$$\frac{d(X + Y\sqrt{-1})}{d(x + y\sqrt{-1})},$$

étant indépendante du rapport $\frac{dy}{dx}$, peut être remplacée par

$$\frac{d(X + Y\sqrt{-1})}{dt} : \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{dt},$$

t désignant un paramètre quelconque, dont x et y seront des fonctions arbitraires; si l'on prend $t = x$, on a pour dérivée

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x}\sqrt{-1}.$$

Il est facile de voir que cette dérivée est encore monogène: en effet, on a identiquement

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right),$$

ce dont on s'assure en remplaçant $\frac{\partial X}{\partial x}$ par son égal $\frac{\partial Y}{\partial y}$ et $\frac{\partial X}{\partial y}$ par $-\frac{\partial Y}{\partial x}$; il résulte de là que les dérivées successives d'une fonction monogène sont toutes uniques et bien déterminées.

Cela posé, observons encore que, si l'on veut prendre la dérivée de $f(z) = f(x + y\sqrt{-1}) = X + Y\sqrt{-1}$ par rapport à un paramètre t dont x et y soient fonctions, on aura

$$\frac{df}{dt} = \frac{d(X + Y\sqrt{-1})}{dt} = \frac{d(X + Y\sqrt{-1})}{d(x + y\sqrt{-1})}\,\frac{d(x + y\sqrt{-1})}{dt},$$

ou

$$\frac{df}{dt} = f'(z)\,\frac{dz}{dt}.$$

Cela posé, proposons-nous de développer la fonction $f(z)$ suivant les puissances ascendantes de z. Posons $z = re^{\theta\sqrt{-1}}$ et

$$f(z) = \varphi(r) + \psi(r)\sqrt{-1}.$$

Les fonctions φ et ψ pouvant d'ailleurs contenir θ, que nous ne mettons pas en évidence pour ne pas compliquer l'écriture, nous aurons

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} f(z) = {} & \varphi(0) + r\varphi'(0) + \ldots + \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(\lambda r) \\ & + \sqrt{-1}\left[\psi(0) + r\psi'(0) + \ldots + \frac{r^n}{1.2.3\ldots n}\psi^n(\mu r)\right], \end{aligned} \right.$$

λ et μ désignant des nombres compris entre 0 et 1. Cette formule suppose seulement l'existence des n premières dérivées de $f(z)$ pour $z = 0$ et dans le voisinage de cette valeur. Or, on a

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} f(z) = \varphi(r) + \sqrt{-1}\,\psi(r) &= f\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right) \\ \varphi'(r) + \sqrt{-1}\,\psi'(r) &= f'\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)e^{\theta\sqrt{-1}} \\ \varphi''(r) + \sqrt{-1}\,\psi''(r) &= f''\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)e^{2\theta\sqrt{-1}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^n(r) + \sqrt{-1}\,\psi^n(r) &= f^n\left(re^{\theta\sqrt{-1}}\right)e^{n\theta\sqrt{-1}}; \end{aligned} \right.$$

portant ces valeurs dans (1), on a

$$f(z)=f(0)+re^{\theta\sqrt{-1}}f'(0)+\ldots+\frac{r^n}{1.2.3\ldots n}[\varphi^n(\lambda r)+\sqrt{-1}\,\psi^n(\mu r)],$$

ce qui peut s'écrire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} f(z)&=f(0)+zf'(0)+\ldots+\frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{n-1}(0)\\ &+\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}e^{-n\theta\sqrt{-1}}\left[\varphi^n(\lambda r)+\sqrt{-1}\,\psi^n(\mu r)\right].\end{aligned}\right.$$

Cela posé, soit R_n la plus grande valeur que puisse prendre le module de $f^n(z)$ ou de $f^n(z)e^{n\theta\sqrt{-1}}$ (ce qui est la même chose) quand le module de z varie de o à r, soit

$$f^n(z)=\rho e^{\alpha\sqrt{-1}};$$

on aura, en vertu de (2),

$$\varphi^n(r)+\sqrt{-1}\,\psi^n(r)=\rho e^{(\alpha+n\theta)\sqrt{-1}}.$$

donc

$$\varphi^n(r)=\rho\cos(\alpha+n\theta),$$
$$\psi^n(r)=\rho\sin(\alpha+n\theta);$$

donc

$$\varphi^n(r)\leq R_n,\quad \psi^n(r)\leq R_n,$$

et par suite aussi

$$\varphi^n(\lambda r)\leq R_n,\quad \psi^n(\mu r)\leq R_n,$$

donc enfin

$$\sqrt{[\varphi^n(\lambda r)]^2+[\psi^n(\mu r)]^2}\quad \text{ou}\quad \text{mod}\left[\varphi^n(\lambda r)+\sqrt{-1}\,\psi^n(\mu r)\right]<R_n\sqrt{2},$$

et la formule (3) peut s'écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} f(z)&=f(0)+zf'(0)+\ldots+\frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{n-1}(z)\\ &+\frac{z^n}{1.2.3\ldots n}R_n\sqrt{2}\,\varepsilon,\end{aligned}\right.$$

R_n désignant le module maximum de $f^n(z)$ quand le module de la variable reste inférieur ou égal à celui de z et ε désignant une imaginaire dont le module est au plus égal à 1.

Posons $f(z) = F(x+z)$ et la formule (4) donnera

$$F(x+z) = F(x) + zF'(x) + \ldots$$
$$+ \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{n-1}(x) + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} R_n \sqrt{2}\varepsilon,$$

R_n désignant le module maximum de $F(x+z)$ quand la variable z conserve un module inférieur à celui qu'elle prend dans la formule précédente, ou, si l'on veut,

R_n *désignant le module maximum de* F^n *quand la variable* z *reste dans un cercle décrit du point* x *comme centre avec le module de* z *pour rayon.*

En particulier, on a

$$(5) \qquad F(x+z) = F(x) + zR_1\varepsilon\sqrt{2}.$$

Si donc $F'(z)$ est nul dans un cercle décrit du point x comme centre avec un rayon quelconque, R_1 sera nul et $F(x+z)$ sera égal à $F(x)$, ce que l'on savait. Mais, réciproquement,

Si la dérivée $F'(z)$ *d'une fonction est nulle à l'intérieur d'un cercle décrit du point* x *comme centre avec un rayon* r, *la fonction* $F(z)$ *sera constante dans ce cercle.*

En effet, R_1 sera nul et la formule (5) donnera

$$F(x+z) = F(x);$$

il résulte de là que *deux fonctions monogènes qui à l'intérieur d'un contour donné ont la même dérivée ne peuvent différer que par une constante, puisque leur différence a sa dérivée toujours nulle.*

La formule de Taylor une fois établie et réduite à ses deux premiers termes permettra de retrouver la valeur de la dérivée d'une fonction composée dans le cas où la variable est imaginaire. Il n'y a rien à changer à la démonstration que l'on a faite en supposant la variable réelle, et il

faut toujours supposer que les dérivées des fonctions composantes sont bien déterminées.

Il reste à examiner les dérivées des fonctions implicites. Soit $z = x + y\sqrt{-1}$ et $u = X + Y\sqrt{-1}$ une fonction de z définie par l'équation

$$f(u, z) = 0.$$

Cette équation équivaut à deux équations telles que

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, X, Y) = 0, \\ \psi(x, y, X, Y) = 0, \end{cases}$$

où l'on a

$$f = \varphi + \psi\sqrt{-1};$$

de (1) l'on tire

$$\frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, Y)} : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(X, Y)},$$
$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(X, y)} : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(X, Y)};$$

mais, si la fonction f est monogène par rapport à u et à z, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = -\frac{\partial \psi}{\partial X}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

donc

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, Y)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial Y} - \frac{\partial \varphi}{\partial Y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(y, X)} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(X, y)};$$

donc enfin

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

On verrait de même que

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

La fonction $X + \sqrt{-1}\,Y$ est donc monogène. L'existence de sa dérivée étant établie, on la trouvera comme dans le cas où la variable est réelle, lorsque l'on sait que la dérivée existe.

§ IV. — Différentielles des fonctions de variables imaginaires.

La différentielle d'une variable imaginaire sera le produit de la dérivée de cette fonction par l'accroissement ou différentielle de sa variable. La définition de la dérivée d'une fonction imaginaire ayant été bien précisée, il ne peut y avoir aucune difficulté pour concevoir la notion des dérivées et des différentielles des différents ordres non plus que la notion de différentielle totale.

CHAPITRE IX.

CHANGEMENT DE VARIABLES.

I. — Changement de variable dans les fonctions d'une seule variable indépendante.

Le problème appelé *changement de variable* a pour but, étant donnée une expression contenant des fonctions, leurs variables et leurs dérivées, de calculer la même expression à l'aide de nouvelles fonctions, de nouvelles variables et des dérivées de ces nouvelles fonctions, les nouvelles fonctions et les nouvelles variables étant liées aux anciennes par le moyen d'un nombre suffisant d'équations données.

On a souvent besoin de résoudre ce problème en Géométrie quand, ayant l'expression d'une ligne en coordonnées rectangulaires, par exemple, on veut en obtenir l'expression dans un autre système de coordonnées rectilignes ou polaires. Mais le Calcul intégral surtout nous fournira de nombreux exemples de changement de variable.

Nous considérerons d'abord le cas où il n'existe qu'une seule variable indépendante. Dans ce cas, nous allons voir que l'on peut calculer les dérivées des anciennes fonctions à l'aide des nouvelles, sans qu'il soit nécessaire de connaître les relations qui lient les fonctions à leurs variables, de sorte qu'il suffira d'avoir l'expression des anciennes fonctions et des anciennes variables en fonction des nouvelles.

Pour résoudre la question qui nous occupe, désignons par x l'ancienne variable et par y l'ancienne fonction (ou l'une des anciennes fonctions), laissons la nouvelle variable indéterminée, afin de nous réserver la faculté de la choisir à la fin du calcul, et désignons-la par t; représentons par un ∂

une différentielle prise en regardant t comme variable indépendante, en réservant le d pour le cas où x est la variable indépendante.

Je dis que l'on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Cette proposition a déjà été établie, mais, en raison de son importance, nous la démontrerons de nouveau.

On a

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t : x'_t;$$

Or $y'_t : y'_x$ est égal à $\frac{y'_t\,dt}{x'_t\,dt}$; le numérateur et le dénominateur de cette fraction sont respectivement égaux à ∂y et ∂x; on a donc bien

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Mais on n'a pas

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

en effet, pour calculer $\frac{d^2 y}{dx^2}$, différentions par rapport à x les deux membres de (2); la dérivée du premier membre est égale à $\frac{d^2 y}{dx^2}$, celle du second s'obtiendra en prenant sa dérivée relative à t et en la multipliant par $\frac{dt}{dx}$, et cela en vertu du théorème des fonctions de fonctions; ainsi

$$(3) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial t}\,\frac{dt}{dx};$$

mais on a (p. 69), d'après la règle de la différentiation d'un quotient,

$$\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y\,\partial x - \partial^2 x\,\partial y}{\partial x^2};$$

de plus, en vertu de (2), $\frac{dt}{dx} = \frac{\partial t}{\partial x}$; donc (3) devient

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y\,\partial x - \partial^2 x\,\partial y}{\partial t\,\partial x^2}\,\frac{\partial t}{\partial x},$$

ou, réductions faites,

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial^2 y\,\partial x - \partial^2 x\,\partial y}{\partial x^3}.$$

Pour obtenir $\frac{d^3y}{dx^3}$, on différentiera le premier membre de cette nouvelle équation par rapport à x; il faudra alors différentier aussi le second par rapport à x, ou, ce qui revient au même, par rapport à t, en multipliant le résultat par $\frac{dt}{dx} = \frac{\partial t}{\partial x}$; on aura ainsi

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^2 y\,\partial x - \partial^2 x\,\partial y}{\partial x^3}\right)}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial x},$$

ou, réductions faites,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^3 y\,\partial x^4 - \partial^2 y\,\partial^2 x\,\partial x^3 - 3\,\partial x^3\,\partial^2 x\,\partial^2 y + 3\,\partial x^2\,\partial^2 x^2\,\partial y}{\partial x^6\,\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial x},$$

c'est-à-dire

$$(5)\qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^3 y\,\partial x^2 - \partial^2 y\,\partial^2 x\,\partial x - 3\,\partial x\,\partial^2 x\,\partial^2 y + 3\,\partial^2 x^2\,\partial y}{\partial x^5}.$$

L'expression de $\frac{d^4y}{dx^4}$ s'obtiendrait en différentiant encore par rapport à x, et ainsi de suite.

Les formules (2), (4), (5) résolvent le problème que nous avions en vue, car $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\cdots$ sont calculés en fonction de ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, ..., lesquels s'exprimeront en fonction des nouvelles variables quand on connaîtra x et y en fonction de ces variables.

Pour bien faire comprendre l'esprit de la méthode, nous l'appliquerons à un exemple : supposons que l'on ait

$$(6)\qquad x = u + v,\quad y = u - v,$$

et que l'on désire calculer $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de $\frac{\partial u}{\partial v}$ et de $\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}$; on déduira de (6)

$$\partial x = \partial u + \partial v,\quad \partial y = \partial u - \partial v,$$
$$\partial^2 x = \partial^2 u + \partial^2 v,\quad \partial^2 y = \partial^2 u - \partial^2 v.$$

Les formules (2) et (4) donneront

$$\text{(7)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial u - \partial v}{\partial u + \partial v},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\partial^2 u - \partial^2 v)(\partial u + \partial v) - (\partial^2 u + \partial^2 v)(\partial u - \partial v)}{(\partial u + \partial v)^3},$$

ou

$$\text{(8)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial^2 u\, \partial v - \partial^2 v\, \partial u}{(\partial u + \partial v)^3}.$$

Jusqu'ici la variable indépendante t est restée indéterminée ; si l'on veut que v soit variable indépendante, on fera, dans (7) et (8), $\partial^2 v = 0$, et l'on aura (il ne faut pas oublier que la variable indépendante est celle pour laquelle la différentielle est constante, et la différentielle seconde nulle)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial u - \partial v}{\partial u + \partial v} = \left(\frac{\partial u}{\partial v} - 1\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial v} + 1\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial^2 u\, \partial v}{(\partial u + \partial v)^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} : \left(\frac{\partial u}{\partial v} + 1\right)^3.$$

Un calculateur non prévenu pourrait déduire des formules (6)

$$dx = du + dv,$$

$$d^2y = d^2u - d^2v,$$

et, par suite,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u - d^2v}{(du + dv)^2}.$$

Cette formule est parfaitement exacte et la suivante aussi,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2u}{d^2v} - 1\right) : \left(\frac{du}{dv} + 1\right)^2 \times \frac{d^2v}{dv^2}$$

mais elles ne nous apprennent rien, et l'on ne peut pas y faire $d^2v = 0$, puisque x est toujours variable indépendante.

Il y a parfois avantage à conserver, dans les calculs, des formules où la variable indépendante reste arbitraire et n'est pas spécifiée ; ces calculs gagnent en élégance et en symétrie, mais il y a alors une remarque curieuse à faire, c'est que les formules ne peuvent pas affecter certaines formes ; ainsi, par exemple, l'expression

$$\frac{d^2y\, dx + d^2x\, dy}{dx^3}$$

ne peut pas exister isolément et représenter, quelle que soit la variable indépendante, une seule et même quantité. En effet, si l'on suppose x variable indépendante, cette expression devient $\frac{d^2y\,dx}{dx^3} = \frac{d^2y}{dx^2}$; si l'on change alors de variable et si l'on reprend l'ancienne variable indépendante arbitraire, on trouve $\frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3}$, qui ne peut pas être identique avec l'expression proposée; celle-ci ne saurait donc exister pour une variable indépendante quelconque.

De là un moyen de vérifier les calculs, analogue à celui que fournit la loi de l'homogénéité en Géométrie; on voit en effet que, si aucune variable de la question que l'on traite n'a été prise pour variable indépendante, les formules affecteront une forme spéciale, telle que, quand on y fera d^2x, d^3x, $\ldots = 0$, par exemple, on devra retomber sur ces formules en faisant le changement de variable le plus général. Cherchons encore ce que devient l'expression

(9) $$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

que l'on rencontre fréquemment en Géométrie, et où $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, quand on y fait

(10) $$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

et que l'on prend θ pour variable indépendante; il faut alors supposer $d^2\theta = 0$.

Pour faire le changement de variable, on doit d'abord exprimer y' et y'' au moyen des différentielles dx, dy, d^2x, d^2y prises par rapport à une variable indépendante quelconque, qui sera plus tard θ; les formules (2) et (4) donnent

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3},$$

et nous écrivons le d en italique parce qu'il n'y a plus de confusion possible : R devient alors

(11) $$R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx - d^2x\,dy}.$$

Les formules (10) donnent, en supposant $d^2\theta = 0$,

$$\begin{aligned}
dx &= dr\ \cos\theta - r\sin\theta\, d\theta,\\
dy &= dr\ \sin\theta + r\cos\theta\, d\theta,\\
d^2x &= d^2r\cos\theta - 2\,dr\,d\theta\sin\theta - r\cos\theta\, d\theta^2,\\
d^2y &= d^2r\sin\theta + 2\,dr\,d\theta\cos\theta - r\sin\theta\, d\theta^2;
\end{aligned}$$

et, en portant ces valeurs dans (11), on trouve

$$R = \frac{(dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{-r\,d^2r\,d\theta + 2\,dr^2\,d\theta + r^2\,d\theta^3}.$$

Nous ferons ce calcul d'une manière plus simple dans la théorie géométrique de la courbure.

II. — Du changement des variables indépendantes dans une fonction de plusieurs variables.

Le problème à résoudre est celui-ci :

Étant données la fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

et une suite de relations, telles que

$$(1)\qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,$$

permettant de calculer les x en fonction des y, ou les y en fonction des x, relations au nombre de n, on pourra considérer u comme une fonction des y et poser

$$u = F(y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

on propose de calculer les dérivées de u relatives aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonction des dérivées de u relatives aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Nous dénoterons les premières dérivées (relatives à $x, \ldots, x_n$) avec la caractéristique ∂; nous dénoterons les autres (relatives à $y_1, y_2, \ldots, y_n$) avec la caractéristique d; cette manière de distinguer les deux espèces de dérivées est tout à fait néces-

saire quand, parmi les variables y, il y en a qui figurent dans la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et nous verrons bientôt que $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{du}{dx}$ sont en général distincts.

Cela posé, on peut regarder u comme une fonction composée de x_i; en effet, $u = F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et en particulier de x_i; si donc on différentie u comme une fonction composée, en laissant les x constants, à l'exception de x_i, on aura

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{du}{dy_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{du}{dy_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{du}{dy_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i}.$$

Cette formule résout la question pour le premier ordre; $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est calculé en fonction de $\frac{du}{dy_1}, \ldots, \frac{du}{dy_n}$, car les dérivées $\frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \cdots$ se déduisent des relations (1).

Il y a parfois avantage à procéder différemment. En considérant $u = F(x_1, \ldots, x_n)$ comme fonction composée de y_i, on a

$$\frac{du}{dy_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dy_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dy_i} + \ldots.$$

Si l'on fait $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, on a n équations du premier degré en $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots$ que l'on pourra résoudre par rapport à ces inconnues. Cette méthode sera avantageuse quand les x seront donnés explicitement en fonction des y. La première méthode, au contraire, devra être préférée quand les y seront donnés en fonction des x.

Je passe maintenant au calcul des dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ en fonction des dérivées $\frac{d^2 x}{dy_i dy_j}$. Reprenons la formule (2)

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{du}{dy_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{du}{dy_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i}.$$

Chaque terme du second membre peut être considéré comme une fonction soit simple, soit composée, de x_j par les y; en différentiant alors par rapport à x_j et en écrivant, pour plus

de clarté, dans le second membre, sur une même ligne, les dérivées de chaque terme de (2), nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = {} & \frac{d^2 u}{dy_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_i}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{d^2 u}{dy_1\, dy_n}\frac{\partial y_1}{\partial x_i}\frac{\partial y_n}{\partial x_j} + \frac{du}{dy_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{d^2 u}{dy_n\, dy_1}\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{d^2 u}{dy_n^2}\frac{\partial y_n}{\partial x_i}\frac{\partial y_n}{\partial x_j} + \frac{du}{dy_n}\frac{\partial^2 y_n}{\partial x_i \partial x_j}.\end{aligned}$$

Cette formule résout la question pour le second ordre, et les dérivées $\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k}$ se déduiront des formules (1). On pourrait aussi suivre une méthode analogue à la seconde, que nous avons donnée pour le premier ordre. Nous ne pousserons pas plus loin cette théorie qui, pour les ordres suivants, donnerait des formules de plus en plus compliquées. Passons aux applications.

III. — Première application des théories précédentes. Les fonctions isotropes de Cauchy.

Pour bien faire comprendre les théories exposées au paragraphe précédent, nous ne saurions mieux faire que de les appliquer à une théorie développée par Cauchy à propos de ses travaux sur les vibrations de l'éther (*Nouveaux Exercices*).

Cauchy appelle *fonction isotrope* une expression qui ne change ni de forme ni de valeur, quand on fait une transformation de coordonnées en passant d'axes rectangulaires à d'autres axes également rectangulaires, sans changer d'origine. Les formules de transformation en question sont

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a\xi + b\eta + c\zeta, & \xi = ax + a'y + a''z, \\ y = a'\xi + b'\eta + c'\zeta, & \eta = bx + b'y + b''z, \\ z = a''\xi + b''\eta + c''\zeta, & \zeta = cx + c'y + c''z. \end{cases}$$

Entre les neuf cosinus a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', il existe des relations bien connues dont nous ferons usage, mais qu'il est inutile d'écrire.

Cela posé, considérons l'expression

$$U_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

que Lamé appelle le *paramètre différentiel du premier ordre* de la fonction u de x, y, z; il est facile de voir que cette fonction est isotrope. Faisons, en effet, le changement de variable (1), nous aurons

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x};$$

mais des formules (1), résolues par rapport à ξ, η, ζ, on tire

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = c;$$

donc

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + c\,\frac{\partial u}{\partial \zeta},\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= a'\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + b'\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + c'\,\frac{\partial u}{\partial \zeta},\\ \frac{\partial u}{\partial z} &= a''\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + b''\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + c''\,\frac{\partial u}{\partial \zeta}. \end{aligned} \right.$$

En élevant ces formules au carré, en les ajoutant et en ayant égard aux relations

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0, \quad \ldots,$$

on trouve

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^2;$$

la fonction U_1 est donc isotrope.

Considérons encore l'expression

$$U_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

que Lamé a rencontrée souvent dans ses recherches de Physique mathématique et à laquelle il a donné le nom de *paramètre différentiel du second ordre* de la fonction u.

Effectuons le même changement de variable que tout à

l'heure; à cet effet, les formules (3) donnant $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, calculons $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, et, pour cela, différentions la première de ces formules (3) par rapport à x; nous aurons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right] + b\left[\ \dots\ \right] + c\left[\ \dots\ \right],$$

ou bien, en remplaçant $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ par leurs valeurs a, b, c,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2bc\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + 2ca\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + 2ab\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

Les valeurs de $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ s'en déduisent en accentuant une fois et deux fois les lettres a, b, c. En ajoutant les formules ainsi obtenues avec celle-ci et en ayant égard aux relations $a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$, $ab + a'b' + a''b'' = 0$, ..., on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2},$$

et la fonction U_2 est isotrope comme U_1.

Cauchy a indiqué le moyen de former toutes les fonctions isotropes; nous nous bornerons ici à en signaler quelques-unes, ce qui constituera toute une série d'exercices sur le changement de variable.

x, y, z et x', y', z' étant les coordonnées de deux points de l'espace, les fonctions suivantes sont isotropes :

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad xx' + yy' + zz';$$

$$x'\frac{\partial u}{\partial x} + y'\frac{\partial u}{\partial y} + z'\frac{\partial u}{\partial z}, \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z'}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial x'} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y'} + \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial z'};$$

d'ailleurs, en examinant avec attention ces formules, le lecteur pourra bientôt écrire une infinité d'autres fonctions isotropes.

IV. — Changement de variable dans le cas où l'on change à la fois les fonctions et les variables indépendantes.

Le problème du changement de variable considéré dans toute sa généralité peut s'énoncer ainsi :

Étant données $m+n$ relations

$$(1) \qquad f_1=0, \quad f_2=0, \quad \ldots, \quad f_{m+n}=0,$$

entre m fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et m autres fonctions $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ de n nouvelles variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, calculer les dérivées des y par rapport aux x en fonction des dérivées des η prises par rapport aux ξ, et vice versâ.

Ce problème, comme on va le voir, peut se résoudre sans qu'il soit nécessaire de connaître les relations qui lient les y aux x. Au fond, il coïncide avec un problème déjà résolu, celui qui a pour but de faire connaître les dérivées d'une fonction implicite. En effet, les équations (1) peuvent être considérées comme définissant $m+n$ fonctions implicites de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, savoir $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_m$, les η étant des fonctions des ξ dont on peut supposer les dérivées données. Ce que l'on veut, ce sont les dérivées des y; ce sont les seules que l'on calculera; il faudra éliminer celles des ξ.

Ainsi comprise, la question est résolue par ce qui a été dit plus haut; on différentiera les $m+n$ équations (1) par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et l'on obtiendra, en particulier, en différentiant $f_i=0$ par rapport à x_j,

$$(2) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \sum_{\mu} \frac{\partial f_i}{\partial y_\mu}\frac{\partial y_\mu}{\partial x_j} + \sum_{\nu}\left[\frac{\partial f_i}{\partial \eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_\nu} + \frac{\partial f_i}{\partial \eta_2}\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_\nu} - \ldots - \frac{\partial f_i}{\partial \xi_\nu}\right]\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_j} = 0.$$

On aura $(m+n)n$ équations pareilles à celle-ci, donnant les mn quantités $\frac{\partial y_\mu}{\partial x_j}$ et les n^2 quantités $\frac{\partial \xi_\nu}{\partial x_j}$; ces n^2 quantités n'ont pas besoin d'être calculées : on pourra les éliminer, et

l'on aura les résultats en fonction des dérivées des $\frac{\partial \eta}{\partial \xi}$ et des dérivées partielles des f dont on pourra éliminer les x et les y au moyen des formules (1).

Si l'on différentie de nouveau les équations (2) par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on introduit les dérivées secondes des η par rapport aux ξ, et l'on peut calculer les dérivées secondes des ξ et des y par rapport aux x; comme on n'a pas besoin des dérivées des ξ, on les éliminera pour ne calculer que celles des y, et ainsi de suite.

Le changement de variables, dans le cas général, conduit à des calculs parfois inextricables; il convient de n'en user que lorsque l'on y est contraint. Nous allons nous borner à traiter deux exemples très simples pour faire bien saisir l'esprit de la méthode.

1° *Étant données les équations*

$$(3)\qquad \begin{cases} x = a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta, \\ y = a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z = a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{cases}$$

calculer les dérivées $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *en fonction des dérivées* $p' = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $q' = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$, $r' = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}$, $s' = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi\,\partial \eta}$, $t' = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}$; *on suppose qu'il existe entre les quantités $a, b, c, \ldots$ les relations qui lient entre eux les neuf cosinus d'une transformation de coordonnées.*

Différentions les équations données (3) par rapport à ξ et η, en considérant z comme fonction composée de ξ et η par x et y; nous aurons

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi} = a + cp', \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = a' + c'p', \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} = b + cq', \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = b' + c'q', \\ p\,\frac{\partial x}{\partial \xi} + q\,\frac{\partial y}{\partial \xi} = a'' + c''p', \\ p\,\frac{\partial x}{\partial \eta} + q\,\frac{\partial y}{\partial \eta} = b'' + c''q'; \end{cases}$$

si, entre ces six équations, on élimine $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ dont on n'a pas besoin, on trouve

$$(5) \qquad p = \frac{ap' + bq' + c}{a''p' + b''q' + c''}, \quad q = \frac{a'p' + b'q' + c'}{a''p' + b''q' + c''}.$$

Passons au calcul des dérivées secondes. La règle générale nous apprend qu'il faut différentier une seconde fois les formules (3), ce qui fournit neuf équations nouvelles. On observera qu'on les a déjà différentiées une fois, ce qui a fourni les formules (4); il suffira donc de différentier celles-ci par rapport à ξ et η, ce qui, en apparence, fournit douze équations; mais il faut remarquer qu'une même équation peut être fournie deux fois; ainsi celle qui a pour premier membre $\frac{\partial^2 x}{\partial \eta\, \partial \xi}$ peut être obtenue en différentiant par rapport à η celle qui a pour premier membre $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, ou par rapport à ξ celle qui a pour premier membre $\frac{\partial x}{\partial \eta}$.

Entre les neuf équations *distinctes* que l'on obtient en différentiant (4), et qui introduiront les inconnues nouvelles r, s, t, $\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial \eta\, \partial \xi}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \eta\, \partial \xi}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}$, on éliminera les six dernières et l'on aura r, s, t en fonction de r', s', t'.

Mais, au lieu de recourir aux équations (4), on peut différentier les équations (5), qui en sont des conséquences et dont les quantités $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, ... ont été éliminées, ce qui n'introduira pas les inconnues nouvelles $\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}$, ...; le calcul sera ainsi un peu plus simple et l'on aura, en différentiant par rapport à ξ, la première équation (5),

$$r \frac{\partial x}{\partial \xi} + s \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{(ab'' - ba'')(r'q' - s'p') + r'(ac'' - ca'') + s'(bc'' - cb'')}{(a''p' + b''q' + c'')^2},$$

ou bien, en ayant égard aux relations $b'c'' - c'b'' = a$, $b''c - cb'' = a'$, ...,

$$r \frac{\partial x}{\partial \xi} + s \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{c'(s'p' - r'q') - s'a' + r'b'}{(a''p' + b''q' + c'')^2}.$$

et de même, en différentiant par rapport à η,

$$r\frac{\partial x}{\partial \eta} + s\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{c'(t'p' - s'q') - t'a' + s'b}{(a''p' + b''q' - c'')^2}.$$

On peut se contenter de différentier une fois la seconde équation (5); toutefois, en différentiant par rapport à ξ et à η, on trouve

$$s\frac{\partial x}{\partial \xi} + t\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{c(r'q' - s'p') + s'a - r'b}{(a''p' + b''q' + c'')^2},$$

$$s\frac{\partial x}{\partial \eta} + t\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{c(sq' - tp') + t'a - s'b}{(a''p' + b''q' + c'')^2};$$

trois de ces quatre formules donneront r, s, t quand on y aura remplacé $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$; $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ par leurs valeurs (4).

Remarque. — On aurait pu diriger les calculs autrement et différentier les équations (3) par rapport à x et à y, ce qui aurait donné

$$1 = a\frac{\partial \xi}{\partial x} + b\frac{\partial \eta}{\partial x} + c\left(p'\frac{\partial \xi}{\partial x} + q'\frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \quad \ldots;$$

en éliminant entre ces équations $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, on aurait eu des relations entre p, q, p', q' qui auraient permis de calculer deux de ces quantités en fonction des deux autres.

En différentiant une seconde fois par rapport à x et y, on aurait trouvé d'autres relations donnant r, s, t en fonction de p', q', r', s', t', ...

2° *Étant données les relations*

$$(6)\qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\psi, \\ y = r\sin\theta\sin\psi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

qui permettent de transformer les coordonnées ordinaires x, y, z *d'un point en coordonnées polaires* r, θ, ψ, *on propose de calculer les dérivées* $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$, ..., *en fonction de* r, θ, ψ *et de* $\frac{\partial r}{\partial \theta}$, $\frac{\partial r}{\partial \psi}$, ...

Conformément à la méthode que nous venons d'exposer, différentions (6) par rapport à θ et ψ ; nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \theta} &= \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\psi + r \cos\theta \cos\psi, \\
\frac{\partial x}{\partial \psi} &= \frac{\partial r}{\partial \psi} \sin\theta \cos\psi - r \sin\theta \sin\psi, \\
\frac{\partial y}{\partial \theta} &= \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \sin\psi + r \cos\theta \sin\psi, \\
\frac{\partial y}{\partial \psi} &= \frac{\partial r}{\partial \psi} \sin\theta \sin\psi + r \sin\theta \cos\psi, \\
\frac{\partial x}{\partial \theta} p + \frac{\partial y}{\partial \theta} q &= \frac{\partial r}{\partial \theta} \cos\theta - r \sin\theta, \\
\frac{\partial x}{\partial \psi} p + \frac{\partial y}{\partial \psi} q &= \frac{\partial r}{\partial \psi} \cos\theta ;
\end{aligned}$$

on tire de là, en éliminant $\frac{\partial x}{\partial \theta}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}$, $\frac{\partial x}{\partial \psi}$ et $\frac{\partial y}{\partial \psi}$, les valeurs suivantes de p et q :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned}
D p &= r \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\theta \cos\psi - r \frac{\partial r}{\partial \psi} \sin\psi - r^2 \sin^2\theta \cos\psi, \\
D q &= r \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin\theta \cos\theta \sin\psi + r \frac{\partial r}{\partial \psi} \cos\psi - r^2 \sin^2\theta \sin\psi,
\end{aligned} \right.$$

où

$$D = r \frac{\partial r}{\partial \theta} \sin^2\theta + r^2 \sin\theta \cos\theta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \psi)},$$

$$D^2(1 + p^2 + q^2) = r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 \sin^2\theta + r^2 \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2 + r^4 \sin^2\theta.$$

Pour obtenir les dérivées secondes de z, on peut différentier les équations (7) par rapport à θ et ψ ; les premiers membres deviennent

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial D}{\partial \theta} p + D\left(r \frac{\partial x}{\partial \theta} + s \frac{\partial y}{\partial \theta}\right), \\
&\frac{\partial D}{\partial \psi} p + D\left(r \frac{\partial x}{\partial \psi} + s \frac{\partial y}{\partial \psi}\right), \\
&\frac{\partial D}{\partial \theta} q + D\left(s \frac{\partial x}{\partial \theta} + t \frac{\partial y}{\partial \theta}\right);
\end{aligned}$$

en y remplaçant $\frac{\partial x}{\partial \theta}$, $\frac{\partial x}{\partial \psi}$, $\frac{\partial y}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial y}{\partial \psi}$ par leurs valeurs (3), et p, q par leurs valeurs (7), on aura des équations permettant de calculer r, s, t (1). Il y aura, si l'on veut, une équation rentrant dans celle-ci en différentiant la seconde formule (4) par rapport à x.

Il serait difficile de choisir des applications plus simples du cas où l'on change à la fois la fonction et les variables indépendantes. On voit que les calculs, théoriquement fort simples, conduisent à des résultats compliqués dès que l'on dépasse le premier ordre; aussi le changement de variable doit-il être évité quand cela est possible.

V. — Autre méthode pour le changement de variable.

On a proposé une autre méthode pour le changement de variable; elle ne diffère pas au fond de celle que nous venons d'indiquer, mais elle présente quelquefois des avantages dans les applications.

Elle consiste à identifier deux expressions de la différentielle de la fonction que l'on soumet au changement de variable.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on veuille calculer les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en fonction des dérivées $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$; x, y, z étant liés à ξ, η, ζ par trois équations.

On écrira d'abord

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy; \tag{1}$$

d'un autre côté, on a aussi

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)d\xi + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)d\eta. \tag{2}$$

(1) La lettre r désigne ici à la fois le rayon vecteur et la dérivée $\frac{d^2 z}{dx^2}$, mais il n'y a pas de confusion possible.

Si, dans (1), on remplace dx et dy par leurs valeurs, on a

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\,d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta}\,d\zeta\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\,d\zeta\right),$$

ou

$$\begin{aligned} dz = \frac{\partial z}{\partial x}&\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)d\xi + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)d\eta\right] \\ + \frac{\partial z}{\partial y}&\left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)d\xi + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)d\eta\right]; \end{aligned}$$

identifiant cette valeur de dz avec (2), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} &= \frac{\partial z}{\partial x}\left[\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial z}{\partial y}\left[\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right] \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\left[\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right] + \frac{\partial z}{\partial y}\left[\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right]; \end{aligned}$$

d'où l'on tire $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ ou $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ en fonction les uns des autres.

La même méthode s'applique aux dérivées secondes : on peut calculer $d^2 z$ de deux manières. Ainsi

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2 x + \frac{\partial z}{\partial \eta}\,d^2 y,$$

mais

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\,d\xi^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta}\,d\xi\,d\eta + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\,d\eta^2 + \ldots + \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta^2}\,d\zeta^2 + \frac{\partial z}{\partial \zeta}\,d^2\zeta.$$

Ces deux expressions peuvent se ramener toutes deux à la forme

$$P\,d\xi^2 + 2Q\,d\xi\,d\eta + R\,d\eta^2,$$

et, en les identifiant, on a des équations d'où l'on pourra tirer $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi\,\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}$ en fonction de $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ou *vice versa*, ...

VI. — Quelques changements de variables effectués au moyen d'artifices particuliers.

Transformation de Legendre. — *On pose*

$$u = px + qy - z,$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

et l'on demande de calculer p, q, r, s, t *en prenant pour fonction* u *et pour variables* p, q.

On a

$$du = p\,dx + q\,dy - dz + x\,dp + y\,dq$$

ou, en vertu de $dz = p\,dx + q\,dy$,

$$du = x\,dp + y\,dq;$$

on en déduit

$$x = \frac{\partial u}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial q}.$$

Des formules

$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

on tire

$$dx = \frac{t\,dp - s\,dq}{rt - s^2}, \quad dy = \frac{r\,dq - s\,dp}{rt - s^2};$$

donc

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial p} &= \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \\ \frac{\partial x}{\partial q} &= \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} = \frac{-s}{rt - s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial q} &= \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{r}{rt - s^2}; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on peut réciproquement tirer r, s, t.

On a

$$\frac{1}{rt - s^2} = r't' - s'^2,$$

en posant

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} = r', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = t', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q} = s';$$

donc

$$r = \frac{t'}{s'^2 - r't'}, \quad s = \frac{-s'}{s'^2 - r't'}, \quad t = \frac{t'}{s'^2 - r't'}.$$

Étant donnés $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$ *et* $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, *on demande de calculer les dérivées de* y *relatives à* x *et* z.

On a

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

d'où

$$dy = \frac{dz}{q} - \frac{p}{q}\,dx;$$

donc

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{q}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{p}{q}.$$

En second lieu, on a

$$d^2 z = p\,d^2 x + q\,d^2 y + r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

ou, si l'on fait $d^2 z = 0$, $d^2 x = 0$, $dy = \frac{dz}{q} - \frac{p}{q}\,dx$,

$$0 = q\,d^2 y + r\,dx^2 + 2s\,dx\left(\frac{dz}{q} - \frac{p}{q}\,dx\right) + t\left(\frac{dz}{q} - \frac{p}{q}\,dx\right)^2.$$

Résolvant par rapport à $d^2 y$, on en conclut

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{q}\left(r + 2s\frac{p}{q} + t\frac{p^2}{q^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial z} = -\frac{1}{q}\left(\frac{2s}{q} - 2\frac{p}{q^2}t\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{1}{q^3}t.$$

VII. — Sur quelques formules destinées à simplifier le changement de variables.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ deux systèmes de variables liées entre elles par n équations; posons, en général,

$$(1) \qquad \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = a_{ij}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = b_{ij}.$$

Il est facile de voir que l'on n'a pas $a_{ij}\, b_{ij} = 1$; mais, entre les a_{ij} et les b_{ij}, il existe une série de relations que nous allons faire connaître. On peut considérer y_i comme fonction des y_n, puisqu'il est fonction des x et que ceux-ci sont fonction des y. Le théorème des fonctions composées donne

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_j} \text{ ou } 0 = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_j} + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_j}.$$

Si $j \gtrless i$ et si $i = j$,

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_i} \text{ ou } 1 = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i};$$

ces formules peuvent s'écrire

$$(2) \qquad a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj} = \begin{cases} (0 \text{ si } i \gtrless j), \\ (1 \text{ si } i = j). \end{cases}$$

On a, d'une façon analogue,

$$(3) \qquad b_{j1}\, a_{1j} + b_{i2}\, a_{2j} + \ldots + b_{in}\, a_{nj} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \gtrless j, \\ 1 \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Telles sont les relations qui lient les dérivées des y aux dérivées des x; nous poserons

$$P = \Sigma \pm a_{12}\, a_{22} \ldots a_{nn}, \quad Q = \Sigma \pm b_{11}\, b_{22} \ldots b_{nn},$$

et nous aurons $PQ = 1$; cela résulte de la formule

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = 1.$$

Les formules précédentes ont été données pour la première fois par Cauchy. Nous supposerons, dans ce qui va suivre,

$$(4) \qquad a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{in}a_{jn} = 0 \quad (\text{pour } i \gtrless j),$$

$$(5) \qquad a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 = h_i^2.$$

Ce cas se présente souvent dans les applications; on a alors

$$(6) \qquad P^2 = h_1^2 h_2^2 \ldots h_n^2 = \frac{1}{Q^2}.$$

D'un autre côté,

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} dy_1 = a_{11}\,dx_1 + a_{12}\,dx_2 + \ldots + a_{1n}\,dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dy_n = a_{n1}\,dx_1 + a_{n2}\,dx_2 + \ldots + a_{nn}\,dx_n; \end{array}\right.$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} dx_1 = b_{11}\,dy_1 + b_{12}\,dy_2 + \ldots + b_{1n}\,dy_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dx_n = b_{n1}\,dy_1 + b_{n2}\,dy_2 + \ldots + b_{nn}\,dy_n. \end{array}\right.$$

Si, pour abréger, on pose

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = a_{11}\,\beta_1 + a_{21}\,\beta_2 + \ldots + a_{n1}\,\beta_n, \\ \alpha_2 = a_{12}\,\beta_1 + a_{22}\,\beta_2 + \ldots + a_{n2}\,\beta_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = a_{1n}\,\beta_1 + a_{2n}\,\beta_2 + \ldots + a_{nn}\,\beta_n, \end{array}\right.$$

on constate qu'en vertu de (4) et (5) on a

$$(10)\qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = h_1^2\,\beta_1^2 + h_2^2\,\beta_2^2 + \ldots + h_n^2\,\beta_n^2;$$

mais de (9) on tire

$$\begin{array}{l} h_1^2\,\beta_1 = a_{11}\,\alpha_1 + a_{12}\,\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\,\alpha_n \\ h_2^2\,\beta_2 = a_{21}\,\alpha_1 + a_{22}\,\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\,\alpha_n. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Portant ces valeurs dans (10), on trouve

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = {} & \frac{1}{h_1^2}\,(a_{11}\,\alpha_1 + a_{12}\,\alpha_2 + \ldots)^2 \\ & + \frac{1}{h_2^2}\,(a_{21}\,\alpha_1 + a_{22}\,\alpha_2 + \ldots)^2 + \ldots, \end{aligned}$$

ce qui donne, en égalant de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances et des mêmes produits des α.

$$(11)\qquad a_{1i}\,a_{1j} + a_{2i}\,a_{2j} + \ldots + a_{ni}\,a_{nj} = 0,$$

$$(12)\qquad \frac{1}{h_1^2}\,a_{1i}^2 + \frac{1}{h_2^2}\,a_{2i}^2 + \ldots + \frac{1}{h_n^2}\,a_{ni}^2 = 1;$$

si alors on multiplie la première équation (7) par $\frac{1}{h_1^2}\,a_{1i}$, la seconde par $\frac{1}{h_2^2}\,a_{2i}$, ... et si l'on ajoute, on a

$$\frac{a_{1i}}{h_1^2}\,dy_1 + \frac{a_{2i}}{h_2^2}\,dy_2 + \ldots = dx_i,$$

et, en comparant cette formule avec (8),

$$(13)\qquad \frac{a_{ji}}{h_j^2} = b_{ij} \quad \text{ou} \quad a_{ji} = h_j^2\, b_{ij}.$$

Les équations (4) et (5) donnent

$$(14)\qquad b_{1j}b_{1i} + b_{2i}b_{2j} + \ldots + b_{ni}b_{nj} = 0,$$

$$(15)\qquad b_{1j}^2 + b_{2j}^2 + \ldots + b_{nj}^2 = h_j^{-2}.$$

Nous poserons

$$(16)\qquad \Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2,$$

$$(17)\qquad \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

et nous nous proposerons de calculer $\Delta_1 u$ et $\Delta_2 u$ en fonction des y. Nous avons

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial y_1} a_{11} + \frac{\partial u}{\partial y_2} a_{21} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial y_n} a_{n1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} &= \frac{\partial u}{\partial y_1} a_{n1} + \frac{\partial u}{\partial y_2} a_{n2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial y_n} a_{nn}. \end{aligned}\right.$$

Élevons au carré et ajoutons, en ayant égard à (4) et (5); nous obtiendrons

$$(19)\qquad \Delta_1 u = h_1^2\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\right)^2 + h_2^2\left(\frac{\partial u}{\partial y_2}\right)^2 + \ldots + h_n^2\left(\frac{\partial u}{\partial y_n}\right)^2$$

et, en différentiant (18),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} a_{11}^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} a_{12}a_{11} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \ldots, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} a_{21}^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} a_{21}a_{22} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si nous ajoutons, nous aurons, en vertu de (4) et (5),

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta_2 u = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} h_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} h_n^2 \\ & + \frac{\partial u}{\partial y_1}\Delta_2 y_1 + \frac{\partial u}{\partial y_2}\Delta_2 y_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial y_n}\Delta_2 y_n. \end{aligned}\right.$$

Calculons maintenant $\Delta_2 y_\mu$; nous avons

$$\Delta_2 y_\mu = \sum_i \frac{\partial a_{\mu i}}{\partial x_i} = \sum_{ij} \frac{\partial a_{\mu i}}{\partial y_j} a_{ji}$$

ou, en vertu de (13),

$$\Delta_2 y_\mu = \sum_{ij} \frac{\partial h_\mu^2 b_{i\mu}}{\partial y_j} a_{ji}$$

ou, en vertu de (2) et (3),

$$\begin{aligned}
\Delta_2 y_\mu &= \sum_{ij} \frac{\partial h_\mu^2 b_{i\mu}}{\partial y_j} \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial b_{ij}} \\
&= \frac{1}{Q} \sum_{ij} \left(\frac{\partial Q}{\partial b_{ij}} b_{i\mu} \frac{\partial h_\mu^2}{\partial y_j} + h_\mu^2 \frac{\partial Q}{\partial b_{ij}} \frac{\partial b_{i\mu}}{\partial y_j} \right) \\
&= \frac{1}{Q} \sum_{ij} \left(\frac{\partial Q}{\partial b_{ij}} b_{i\mu} \frac{\partial h_\mu^2}{\partial y_j} + h_\mu^2 \frac{\partial Q}{\partial b_{ij}} \frac{\partial b_{ij}}{\partial y_\mu} \right) \\
&= \frac{1}{Q} \sum_\mu \left(Q \frac{\partial h_\mu^2}{\partial y_\mu} + h_\mu^2 \frac{\partial Q}{\partial y_\mu} \right) \\
&= \frac{1}{Q} \frac{\partial Q h_\mu^2}{\partial y_\mu}.
\end{aligned}$$

La formule (20) devient alors, en la multipliant par Q,

$$Q \Delta_2 u = Q \sum_\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu^2} h_\mu^2 + \sum_\mu \frac{\partial Q h_\mu^2}{\partial y_\mu} \frac{\partial u}{\partial y_\mu}$$

ou

$$Q \Delta_2 u = \sum_\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu^2} h_\mu^2 Q + \frac{\partial u}{\partial y_\mu} \frac{\partial Q h_\mu^2}{\partial y_\mu} \right)$$

ou enfin

$$Q \Delta_2 u = \sum_\mu \frac{\partial}{\partial y_\mu} \left(h_\mu^2 Q \frac{\partial u}{\partial y_\mu} \right). \tag{21}$$

Application. — Supposons que l'on veuille calculer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta_2 u.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned}
x &= r \sin\theta \cos\psi, \\
y &= r \sin\theta \sin\psi, \\
z &= r \cos\theta,
\end{aligned}$$

on constate que l'on a

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \theta}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \psi}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \psi}=0;$$

on peut alors calculer $\Delta_2 u$ par la formule (21), et l'on trouve

$$\Delta_2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right).$$

VIII. — Variables elliptiques.

Considérons les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_1^2}{a_1^2+\lambda_1}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2+\lambda_1}+\ldots+\dfrac{x_n^2}{a_n^2+\lambda_1}=1, \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2+\lambda_2}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2+\lambda_2}+\ldots+\dfrac{x_n^2}{a_n^2+\lambda_2}=1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_1^2}{a_1^2+\lambda_n}+\dfrac{x_2^2}{a_2^2+\lambda_n}+\ldots+\dfrac{x_n^2}{a_n^2+\lambda_n}=1, \end{array}\right.$$

dans lesquelles $a_1, a_2, \ldots$ sont des nombres positifs quelconques, que nous supposerons inégaux et tels que

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots.$$

Elles établissent n relations qui permettent de calculer les x en fonction des λ, ou *vice versa* les λ en fonction des x. Les variables λ sont ce que l'on appelle des *variables elliptiques* ou des *coordonnées elliptiques*, pour une raison qui sera donnée plus tard. Ces coordonnées elliptiques jouent un rôle important en Analyse et en Géométrie; elles ont été découvertes par Chasles et Jacobi; ce dernier géomètre et surtout Lamé en ont fait de remarquables applications à la Mécanique et à la Physique mathématique.

Nous allons d'abord montrer comment on peut résoudre les équations (1) par rapport à x_1, x_2, ...; à cet effet, observons que l'équation en λ

$$(2) \qquad \frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda} + \ldots + \frac{a_n^2}{x_n^2+\lambda} - 1 = 0$$

peut être considérée comme ayant pour racines λ_1, λ_2, ..., λ_n, et toutes ces racines sont réelles et séparées par les nombres

$$-\infty, \quad -a_1^2, \quad -a_2^2, \quad \ldots, \quad -a_n^2 \quad \text{et} \quad +\infty.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de supposer, comme nous l'avons fait,

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n,$$

et de substituer successivement dans le premier membre de l'équation (2), à la place de λ, les valeurs

$$-\infty, \quad -a_1^2-\varepsilon, \quad -a_1^2+\varepsilon, \quad -a_2^2-\varepsilon, \quad \ldots, \quad -a_n^2+\varepsilon, \quad +\infty,$$

où ε est très petit. On trouve alors que ce premier membre prend respectivement les signes suivants :

$$- \quad - \quad + \quad - \quad + \quad + \quad \ldots \quad +;$$

et, comme il est continu quand λ varie de $-\infty$ à $-a_1^2$, de $-a_1^2$ à $-a_2^2$, ..., de $-a_n^2$ à $+\infty$, le fait que nous avions avancé se trouve démontré.

Faisons $a_1^2+\lambda = u$; l'équation (2) deviendra

$$\frac{x_1^2}{u} + \frac{x_2^2}{u-a_2^2-a_1^2} + \ldots - 1 = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned} u(u-a_2^2-a_1^2)(u+a_3^2-a_1^2)\ldots \\ -x_1^2(u+a_2^2-a_1^2)(u-a_3^2-a_1^2)\ldots \\ -x_n^2u(u+a_2^2-a_1^2)\ldots(u-a_n^2-a_1^2) = 0; \end{aligned}$$

le produit u_1, u_2, ..., u_n des racines est

$$\pm x_1^2(a_2^2-a_1^2)(a_3^2-a_1^2)\ldots;$$

donc, en remplaçant $u_1, u_2, \ldots$ par leurs valeurs,

$$(a_1^2+\lambda_1)(a_1^2+\lambda_2)\ldots(a_1^2+\lambda_n) = x_1^2(a_2^2-a_1^2)(a_3^2-a_1^2)\ldots,$$

d'où

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1^2 &= \frac{(a_1^2+\lambda_1)(a_1^2+\lambda_2)\ldots(a_1^2+\lambda_n)}{(a_1^2-a_2^2)(a_1^2-a_3^2)\ldots(a_1^2-a_n^2)},\\ x_2^2 &= \frac{(a_2^2+\lambda_1)(a_2^2+\lambda_2)\ldots(a_2^2+\lambda_n)}{(a_2^2-a_1^2)(a_2^2-a_3^2)\ldots(a_2^2-a_n^2)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si l'on retranche les formules (1) membre à membre, on trouve

$$\frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda_1} - \frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda_2} + \ldots = 0.$$

ou, réduisant au même dénominateur les termes en x_1^2 et supprimant le facteur commun $\lambda_1-\lambda_2$,

$$(4)\qquad \frac{x_1^2}{(a_1^2+\lambda_1)(a_1^2+\lambda_2)} + \frac{x_2^2}{(a_2^2+\lambda_1)(a_2^2+\lambda_2)} + \ldots = 0.$$

Des formules (3) on tire, en prenant les dérivées logarithmiques.

$$(5)\qquad \frac{2}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} = \frac{1}{a_1^2+\lambda_1},\quad \frac{2}{x_2}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_2} = \frac{1}{a_1^2+\lambda_2},\quad \ldots$$

et, par suite, on a

$$\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_1}\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2} + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial\lambda_1}\frac{\partial x_n}{\partial\lambda_2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2}{(a_1^2+\lambda_1)(a_1^2+\lambda_2)} + \frac{x_2^2}{(a_2^2+\lambda_1)(a_2^2+\lambda_2)} + \ldots\right],$$

c'est-à-dire, en vertu de (4),

$$\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_1}\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2} + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial\lambda_1}\frac{\partial x_n}{\partial\lambda_2} = 0,$$

et d'autres équations analogues. Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ se conduisent comme les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ du paragraphe précédent. En posant

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_n}\right)^2,$$

on aura

$$\frac{1}{h_i^2} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \lambda_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \lambda_i}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial \lambda_i}\right)^2.$$

Calculons $\frac{1}{h_i^2}$; on a, en vertu de (5),

$$\frac{1}{h_i^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{x_1^2}{(a_1^2+\lambda_i)^2} + \frac{x_2^2}{(a_2^2+\lambda_i)^2} + \ldots\right].$$

Si l'on pose

$$1 - \frac{x_1^2}{a_1^2+\lambda} - \frac{x_2^2}{a_2^2+\lambda} - \ldots = \mathrm{W}(\lambda),$$

on voit que

$$\frac{1}{h_i^2} = \frac{1}{4}\,\frac{\partial \mathrm{W}(\lambda_i)}{\partial \lambda_i};$$

mais $\mathrm{W}(\lambda)$ s'annule pour $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; donc

$$\mathrm{W}(\lambda) = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}{(a_1^2+\lambda)(a_2^2+\lambda)\ldots(a_n^2+\lambda)}\,\mathrm{P},$$

P désignant une constante; cette constante est évidemment égale à 1, et l'on a

$$(6) \qquad \frac{1}{h_i^2} = \frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}{(a_1^2+\lambda_i)(a_2^2+\lambda_i)\ldots(a_n^2+\lambda_i)}.$$

Il est alors facile de calculer $\Delta_1 u$ et $\Delta_2 u$. On a

$$\Delta_1 = h_1^2\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda_1}\right)^2 + h_2^2\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda_2}\right)^2 + \ldots,$$

donc

$$(7) \qquad \Delta_1 u = 4\sum_i \frac{(a_1^2+\lambda_i)(a_2^2+\lambda_i)\ldots(a_n^2+\lambda_i)}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda_i}\right)^2.$$

Calculons $\Delta_2 u$, qui est égal à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2};$$

la dernière formule du paragraphe précédent donne

$$\Delta_2 u = \sum \frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\mathrm{Q}\,h_i^2\,\frac{\partial u}{\partial \lambda_i}\right)$$

ou

(8) $$\Delta_2 u = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda_i^2} Q h_i^2 + \sum \frac{\partial u}{\partial \lambda_i} \frac{\partial Q h_i^2}{\partial \lambda_i}.$$

Dans cette formule Q et h_i sont fournis par la formule (6); on peut la simplifier en supposant λ_i fonction de α_i seul. On a

$$\Delta_2 u = \sum \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial \lambda_i^2} \right] + \sum \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \lambda_i} \frac{\partial Q h_i^2}{\partial \lambda_i}$$

ou

$$\Delta_2 u = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \lambda_i} \right)^2 Q h_i^2 - \sum \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \lambda_i} Q h_i^2 \right);$$

si donc $\frac{\partial \alpha_i}{\partial \lambda_i} Q h_i^2$ ne contenait pas λ_i, on aurait simplement

(9) $$\Delta_2 u = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \lambda_i} \right)^2 Q h_i^2;$$

or $Q h_i^2$ est égal à

$$\frac{h_i}{h_1 h_2 \ldots h_{i-1} h_{i+1} \ldots h_n}$$

ou, en vertu de (6), à

$$\frac{1}{2^n} \frac{\prod_{p,q} (\lambda_p - \lambda_q)}{\sqrt{\prod_{p,q} (\lambda_p - a_q^2)}} \cdot 4 \frac{\prod_p (\lambda_i - a_p^2)}{\prod_p (\lambda_i - \lambda_p)};$$

il suffit donc de prendre

(10) $$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_i - a_1^2)(\lambda_i - a_2^2) \ldots (\lambda_i - a_n^2)}}.$$

IX. — Sur le théorème des fonctions homogènes.

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction homogène et de degré m des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$; par définition, on doit avoir, quel que soit t,

(1) $$f(t x_1, t x_2, \ldots, t x_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à t, on a

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial t x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial t x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t x_n} x_n = m t^{m-1} f$$

ou, en faisant $t = 1$,

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n = mf.$$

C'est dans cette équation que consiste le théorème des fonctions homogènes. Si l'on différentie encore par rapport à t l'équation (2) écrite ainsi :

$$\sum \frac{\partial f}{\partial t x_i} x_i = m t^{m-1} f,$$

on trouve symboliquement

$$\left(\sum \frac{\partial f}{\partial t x_i} x_i\right)^2 = m(m-1) t^{m-2} f$$

ou, en faisant $t = 1$,

$$\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i\right)^2 = m(m-1) f.$$

Il est clair que, l'expression qui forme le premier membre étant développée, on doit y remplacer $\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ par $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, ...
Un calcul analogue donnerait

$$(4)\qquad \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i\right)^\alpha = m(m-1)\ldots(m-\alpha+1) f.$$

Ainsi, dans le cas particulier de deux variables,

$$x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = m(m-1) f.$$

Réciproquement, on peut prouver que, si l'équation

$$(3)\qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf$$

a lieu identiquement, la fonction f est homogène et de degré m. Pour le démontrer, changeons de variables et pre-

nous pour nouvelles variables

$$x_1,\quad \frac{x_2}{x_1}=y_2,\quad \frac{x_3}{x_1}=y_3,\quad \ldots,\quad \frac{x_n}{x_1}=y_n;$$

nous aurons, en désignant par un d les dérivées relatives aux nouvelles variables,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{df}{dx_1} - \frac{df}{dy_2}\frac{x_2}{x_1^2} - \ldots - \frac{df}{dy_n}\frac{x_n}{x_1^2},\\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{df}{dy_2}\frac{1}{x_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial f}{\partial x_n} &= \frac{df}{dy_n}\frac{1}{x_1}.
\end{aligned}$$

L'équation (3) devient alors

$$x_1\frac{df}{dx_1} = mf;$$

on en tire

$$\frac{df}{f} = m\frac{dx_1}{x_1};$$

les expressions $\log f$ et $\log x_1^m$ ont précisément pour différentielles $\frac{df}{f}$ et $m\frac{dx_1}{x_1}$; ces expressions ne sauraient par suite différer que par une quantité indépendante de x_1, que l'on peut appeler $\log\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$; on a donc

$$\log f = \log x_1^m + \log\varphi(y_2, \ldots y_n)$$

ou

$$f = x_1^m\varphi(y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

ou, si l'on veut,

$$f = x_1^m\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Il est clair que cette fonction f satisfait à la formule (1); elle est donc homogène et de degré m. C. Q. F. D.

L'équation (3) est caractéristique des fonctions homogènes; il n'en est pas de même des équations telles que (4), dans lesquelles entrent des dérivées d'ordre supérieur, et nous

verrons plus loin qu'elles peuvent être satisfaites identiquement quand on y remplace f par une fonction non homogène des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

NOTES ET EXERCICES.

1. Voici des formules extraites des *Éléments de Calcul infinitésimal* de Duhamel, et qui servent à transformer les coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires. Soient u une fonction de x, y, z et $z = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta\sin\psi$, $x = r\sin\theta\cos\psi$; on trouve

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dr}\sin\theta\cos\psi + \frac{du}{d\theta}\,\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{du}{d\psi}\,\frac{\sin\psi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du}{dr}\sin\theta\sin\psi + \frac{du}{d\theta}\,\frac{\cos\theta\sin\psi}{r} + \frac{du}{d\psi}\,\frac{\cos\psi}{r\sin\theta},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dr}\cos\theta - \frac{du}{d\theta}\,\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx\,dy} = {} & \frac{d^2u}{dr^2}\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi + \frac{d^2u}{d\theta^2}\,\frac{\cos^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r^3} - \frac{d^2u}{d\psi^2}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta}\\ & + 2\,\frac{d^2u}{dr\,d\theta}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi\,dr}\,\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r}\\ & + \frac{d^2u}{d\psi\,d\theta}\,\frac{(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta} - \frac{du}{dr}\,\frac{\sin^2\theta\sin\psi\cos\psi}{r}\\ & - \frac{du}{d\theta}\,\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2}\left(2\sin\theta + \frac{1}{\sin\theta}\right) + \frac{du}{d\psi}\,\frac{\sin^2\psi - \cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx\,dz} = {} & \frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\cos\psi - \frac{d^2u}{d\theta^2}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r^2}\\ & + \frac{d^2u}{d\theta\,dr}\,\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\psi}{r} - \frac{d^2u}{d\psi\,dr}\,\frac{\sin\psi\cos\theta}{r\sin\theta} + \frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\,\frac{\sin\psi}{r^2}\\ & + \frac{du}{d\theta}\,\frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\cos\psi}{r^2} - \frac{du}{dr}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{r}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dy\,dz} = {} & \frac{d^2u}{dr^2}\sin\theta\cos\theta\sin\psi - \frac{d^2u}{d\theta^2}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r^2}\\ & + \frac{d^2u}{d\theta\,dr}\,\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r} + \frac{d^2u}{d\psi\,dr}\,\frac{\cos\psi\cos\theta}{r\sin\theta} - \frac{d^2u}{d\theta\,d\psi}\,\frac{\cos\psi}{r^2}\\ & + \frac{du}{d\theta}\,\frac{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\sin\psi}{r^2} - \frac{du}{dr}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{d^2 u}{dr^2}\sin^2\theta\cos^2\psi + \frac{d^2 u}{d\theta^2}\,\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi}{r^2} + \frac{d^2 u}{d\psi^2}\,\frac{\sin^2\psi}{r^2\sin^2\theta} \\
&\quad + 2\,\frac{\sin\theta\cos\theta\cos^2\psi}{r}\,\frac{d^2 u}{dr\,d\theta} - 2\,\frac{d^2 u}{d\psi\,dr}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r} \\
&\quad - 2\,\frac{d^2 u}{d\theta\,d\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\operatorname{tang}\theta} + \frac{du}{dr}\,\frac{\cos^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\psi}{r} \\
&\quad + \frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\sin^2\psi - 2\sin^2\theta\cos^2\psi}{r^2\sin\theta}\right) + 2\,\frac{du}{d\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u}{dy^2} &= \frac{d^2 u}{dr^2}\sin^2\theta\sin^2\psi + \frac{1}{r^2}\,\frac{d^2 u}{d\theta^2}\cos^2\theta\sin^2\psi + \frac{d^2 u}{d\psi^2}\,\frac{\cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta} \\
&\quad + 2\,\frac{d^2 u}{d\theta\,dr}\,\frac{\sin\theta\cos\theta\sin^2\psi}{r} + 2\,\frac{d^2 u}{d\psi\,dr}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r} \\
&\quad + 2\,\frac{d^2 u}{d\theta\,d\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\operatorname{tang}\theta} + \frac{du}{dr}\,\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi + \cos^2\psi}{r} \\
&\quad + \frac{du}{d\theta}\cos\theta\left(\frac{\cos^2\psi - 2\sin^2\theta\sin^2\psi}{r^2\sin\theta}\right) - 2\,\frac{du}{d\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{d^2 u}{dr^2}\cos^2\theta + \frac{d^2 u}{d\theta^2}\,\frac{\sin^2\theta}{r^2} - 2\,\frac{d^2 u}{d\theta\,dr}\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{du}{dr}\,\frac{\sin^2\theta}{r} \\
&\quad - 2\,\frac{du}{d\theta}\,\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.
\end{aligned}$$

En faisant dans ces formules $\theta = \frac{\pi}{2}$, on obtient les formules relatives au changement des coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires dans le plan; r est alors le rayon vecteur et ψ l'angle polaire.

Par suite, elles permettent aussi de passer des coordonnées ordinaires aux coordonnées semi-polaires.

2. Voici deux manières de transformer la quantité

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Si l'on pose $x = r\cos\psi\sin\theta$, $y = r\sin\psi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, on a, μ désignant $\cos\theta$,

$$\Delta_2 u = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{\partial u}{\partial\mu}(1-\mu^2)\right].$$

En faisant $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = e^p$, on a

$$\Delta_2 u = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2r}\right)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\right). \quad \text{(Cauchy.)}$$

3. Le changement de variable suivant est souvent employé :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{séc}\varphi;$$

par suite, on a

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{tang}\varphi, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \sin\varphi,$$

$$e^x = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \quad x = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

et il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\,\frac{2\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{dy}{d\varphi}\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d\varphi^2}\cos^2\varphi - \frac{dy}{d\varphi}\sin\varphi\cos\varphi.$$

4. x, y, z étant fonctions de t, on suppose que l'on opère un changement de coordonnées et que l'on pose, par conséquent,

$$\begin{aligned} x &= a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta, \\ y &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{aligned}$$

a, b, c, ... désignant neuf cosinus liés entre eux par les relations connues, $a^2 + b^2 + c^2 = 1, \ldots, aa' + bb' + cc' = 0, \ldots$; on propose de dire ce que deviennent, dans le nouveau système de coordonnées, les expressions

$$d^2y\,dx - d^2x\,dy, \quad d^2z\,dy - d^2y\,dz, \quad d^2x\,dz - d^2z\,dx,$$

et le déterminant

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}.$$

5. Que deviennent $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$ quand on prend, pour nouvelles variables, u et v liées par les équations

$$x + y = u, \quad xy = v.$$

6. Que deviennent les dérivées partielles $\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}, \cdots$ quand on pose $x + y = u$, $xy = v$, ou $u + v = x$, $uv = y$?

CHAPITRE X.

THÉORIE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

§ I. — Définitions.

Une des plus belles applications que l'on ait faites du changement de variables est la théorie des *substitutions linéaires*.

On dit que l'on fait une substitution linéaire quand aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on en substitue d'autres $y_1, y_2, \ldots, y_n$ liées à celles-ci par des équations linéaires et homogènes. Ainsi, en posant

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 + \ldots + \gamma_{1n} y_n, \\ x_2 = \gamma_{21} y_1 + \gamma_{22} y_2 + \ldots + \gamma_{2n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \gamma_{n1} y_1 + \gamma_{n2} y_2 + \ldots + \gamma_{nn} y_n, \end{array} \right.$$

$\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots$ désignant des quantités indépendantes des x et des y, on fait une substitution linéaire; les formules suivantes, d'où l'on déduit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deviennent (après que l'on en a déduit $x_1, x_2, \ldots, x_n$) ce que l'on appelle la *substitution inverse*

$$\begin{array}{l} y_1 = \gamma_{11} x_1 + \gamma_{21} x_2 + \ldots + \gamma_{2n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \gamma_{1n} x_1 + \gamma_{2n} x_n + \ldots + \gamma_{nn} x_n. \end{array}$$

Le déterminant $\sum \pm \gamma_{11} \gamma_{22} \ldots \gamma_{nn}$ est ce que l'on appelle le *module* ou le *déterminant* de la substitution (1). Quand ce déterminant est 1, on dit que la substitution est *unimodulaire*.

La substitution (1) est *orthogonale* quand, appliquée à la fonction $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, elle la transforme en $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$.

La substitution (1), appliquée à $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, donne

$$(2) \qquad \sum (\gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 + \ldots + \gamma_{in} y_n)^2$$

ou

$$\sum \gamma_{i\mu} \gamma_{i\nu} y_\mu y_\nu ;$$

cette expression devant être identique à $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$, on a, pour $\mu \gtrless \nu$,

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_i \gamma_{i\mu} \gamma_{i\nu} = 0, \\ &\sum_i \gamma_{i\mu}^2 = 1, \end{aligned} \right.$$

et, si l'on effectue le carré du déterminant $\sum \pm \gamma_{11} \ldots \gamma_{nn}$, on le trouve, en vertu de ces formules (3), égal à $+1$; donc :

Le module d'une substitution orthogonale est égal à ± 1.

On peut résoudre les équations (1) par rapport à y_1, $y_2, \ldots, y_n$: il suffit pour cela d'avoir égard aux relations (3) : si l'on multiplie la première par γ_{11}, la seconde par γ_{21}, etc., et si l'on ajoute, on trouve

Salmon, H. a. p. 42

$$y_1 = \gamma_{11} x_1 + \gamma_{21} x_2 + \ldots + \gamma_{n1} x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On pourra joindre aux formules (3) les suivantes :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \gamma_{i\mu} \gamma_{i\nu} = 0, \\ &\sum \gamma_{i\mu}^2 = 1, \end{aligned} \right.$$

$\sum_i \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu i} = 0$

$\sum_i \gamma_{\mu i}^2 = 0$

pour $\mu \gtrless \nu$, qui résultent de ce que la substitution précédente est orthogonale comme (1).

Voici une méthode indiquée par M. Brioschi pour former des substitutions orthogonales.

Considérons les deux systèmes d'équations

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = u_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = u_n; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = v_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = v_n, \end{cases}$$

et supposons $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = -a_{ji}$; multiplions les équations (1) par $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}$ et ajoutons-les; nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} x_1(c_{i1}a_{11} + c_{i2}a_{21} + \ldots + c_{in}a_{n1}) \\ + x_2(c_{i1}a_{12} + c_{i2}a_{22} + \ldots + c_{in}a_{n2}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = c_{i1}u_1 + c_{i2}u_2 + \ldots + c_{in}u_n.$$

Le premier membre de cette équation se réduira à v_i, si l'on pose

$$c_{i1}a_{1j} + c_{i2}a_{2j} + \ldots + c_{in}a_{nj} = a_{ji} = -a_{ij},$$

ou

$$c_{i1}a_{1j} + c_{i2}a_{2j} + \ldots + (c_{ii} + 1)a_{ij} + \ldots + c_{in}a_{nj} = 0.$$

On déduit de là les valeurs des c_{ij}

$$c_{ij} = -\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial\Delta}{\partial a_{j1}}a_{1i} + \frac{\partial\Delta}{\partial a_{j2}}a_{2i} + \ldots + \frac{\partial\Delta}{\partial a_{jn}}a_{ni}\right],$$

Δ désignant le déterminant des quantités a_{ij}. Cela posé, multiplions les équations (2) par $d_{1i}, d_{2i}, \ldots, d_{ni}$; nous aurons

$$x_1(a_{11}d_{1i} + a_{12}d_{2i} + \ldots + a_{1n}d_{ni}) + \ldots = d_{1i}v_1 + d_{2i}v_2 + \ldots + d_{ni}v_n,$$

et, pour que le second membre se réduise à u_i, il suffit que

$$d_{1i}a_{j1} + d_{2i}a_{j2} + \ldots + d_{ni}a_{jn} = a_{ij};$$

on en conclut

$$d_{ji} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial a_{1j}}a_{i1} + \frac{\partial\Delta}{\partial a_{2j}}a_{i2} + \ldots\right),$$

par suite $d_{ji} = c_{ij}$, et l'on a

$$\begin{aligned}
v_1 &= c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \ldots + c_{1n}u_n,\\
v_2 &= c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + \ldots + c_{2n}u_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
v_n &= c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + \ldots + c_{nn}u_n,\\
u_1 &= c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + \ldots + c_{n1}v_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
u_n &= c_{1n}v_1 + c_{2n}v_2 + \ldots + c_{nn}v_n.
\end{aligned}$$

Ces formules ayant lieu simultanément, il est facile de voir que les substitutions qu'elles représentent sont orthogonales, ce que l'on vérifie en formant $c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + \ldots$ au moyen du premier système, et en observant que l'on doit avoir identiquement u, etc.

Voici une application de ces formules : posons

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1, & a_{12} &= \nu, & a_{13} &= -\mu,\\
a_{21} &= -\nu, & a_{22} &= 1, & a_{23} &= \lambda,\\
a_{31} &= \mu, & a_{32} &= -\lambda, & a_{33} &= 1;
\end{aligned}$$

nous aurons

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

ensuite

$$\begin{aligned}
c_{11} + \nu c_{21} - \mu c_{31} &= 1,\\
-\nu c_{11} + c_{21} + \lambda c_{31} &= \nu,\\
\mu c_{11} - \lambda c_{21} + c_{31} &= \mu,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{1}{\Delta}(1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2), & c_{21} &= \frac{2}{\Delta}(\lambda\mu + \nu), & c_{31} &= \frac{2}{\Delta}(\lambda\nu - \mu),\\
c_{12} &= \frac{2}{\Delta}(\lambda\mu - \nu), & c_{22} &= \frac{1}{\Delta}(1 + \mu^2 - \nu^2 - \lambda^2), & c_{32} &= \frac{2}{\Delta}(\mu\nu + \lambda),\\
c_{13} &= \frac{2}{\Delta}(\lambda\nu + \mu), & c_{23} &= \frac{2}{\Delta}(\mu\nu - \lambda). & c_{33} &= \frac{1}{\Delta}(1 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2).
\end{aligned}$$

Ces formules ont été données par O. Rodrigues, qui les a trouvées par une tout autre voie; elles servent, comme les

formules d'Euler, à la transformation des coordonnées, mais les neuf cosinus sont ainsi rationnellement exprimés par le moyen des trois paramètres λ, μ, ν.

Si l'on appelle θ l'angle dont il faut faire tourner, pour l'amener sur le second, le premier système d'axes autour d'une droite faisant avec les anciens ou les nouveaux axes les angles α, β, γ, Rodrigues a montré que l'on avait

$$\lambda = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\cos\alpha, \quad \mu = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\cos\beta, \quad \nu = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta\cos\gamma.$$

(*Voir* le *Journal de Liouville*, t. V, 1re Série).

II. — Application des substitutions linéaires aux fonctions homogènes du premier degré.

Le but des substitutions linéaires est la simplification des fonctions; en Géométrie analytique, les transformations de coordonnées sont des substitutions linéaires.

Lorsque l'on fait subir une substitution linéaire à une fonction telle que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

on peut, et cela d'une infinité de manières (c'est-à-dire au moyen d'une infinité de substitutions), la ramener à la forme donnée

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots + \mu_n y_n.$$

De même, étant données n fonctions linéaires

$$\begin{array}{l}
\lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 + \ldots + \lambda_{1n} x_n, \\
\lambda_{21} x_1 + \lambda_{22} x_2 + \ldots + \lambda_{2n} x_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{n1} x_1 + \lambda_{n2} x_2 + \ldots + \lambda_{nn} x_n.
\end{array}$$

si l'on fait la substitution

$$\begin{array}{l}
x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 + \ldots + \gamma_{1n} y_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = \gamma_{n1} y_1 + \gamma_{n2} y_2 + \ldots + \gamma_{nn} y_n,
\end{array}$$

elles deviendront respectivement

$$\mu_{11}y_1 + \mu_{12}y_2 + \ldots + \mu_{1n}y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mu_{n1}y_1 + \mu_{n2}y_2 + \ldots + \mu_{nn}y_n,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(1) \qquad \mu_{ij} = \lambda_{i1}\gamma_{1j} + \lambda_{i2}\gamma_{2j} + \ldots + \lambda_{in}\gamma_{nj}.$$

Si donc on se donne $\mu_{i1}, \mu_{i2}, \ldots, \mu_{in}$ à l'avance, on aura n équations entre les n^2 quantités γ_{ij} pour déterminer ces quantités; si l'on se donne tous les μ_{ij}, on aura ainsi n^2 relations entre les γ_{ij}; donc :

On peut toujours ramener simultanément n fonctions homogènes du premier degré à d'autres, données à l'avance, au moyen d'une substitution linéaire, et cela d'une seule manière.

Il y a pourtant une exception à cette règle; en effet, les γ_{ij} ne sauraient recevoir des valeurs bien déterminées si le déterminant $\sum \pm \lambda_{11}\lambda_{22}\ldots\lambda_{nn}$ était nul, mais alors il existerait des relations linéaires entre les coefficients λ_{ij}, et les fonctions considérées ne seraient pas distinctes, ce qui est d'accord avec le théorème (p. 168).

Nous remarquerons enfin que, en vertu de (1), le déterminant des fonctions données est égal à celui des transformées, multiplié par le déterminant de la substitution. Ce théorème sera généralisé.

III. — Application des théories précédentes aux fonctions homogènes du second degré.

Les fonctions homogènes du second degré jouent un rôle important dans un grand nombre de questions d'Analyse, et en particulier dans la théorie des maxima que nous allons bientôt étudier.

Une fonction homogène du second degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$

peut être représentée par le symbole $\sum a_{ij} x_i x_j$, où l'on suppose $a_{ij} = a_{ji}$; ainsi on a pour le cas de deux variables, par exemple,

$$\sum a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2.$$

Théorème I. — *Toute fonction homogène du second degré à n variables est une somme de n carrés positifs, négatifs ou nuls* [1].

Si l'on pose, en effet,

$$\begin{aligned}\sum a_{ij} x_i x_j = & (\gamma_{11} x_1 + \gamma_{12} x_2 + \ldots + \gamma_{1n} x_n)^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\gamma_{21} x_1 + \gamma_{22} x_2 + \ldots + \gamma_{2n} x_n)^2 \\ & + (\gamma_{n1} x_1 + \gamma_{n2} x_2 + \ldots + \gamma_{nn} x_n)^2,\end{aligned}$$

on obtiendra $\frac{n(n+1)}{2}$ équations en égalant les coefficients de x_1^2, $x_1 x_2$, ...; ces équations permettront de calculer d'une infinité de manières les quantités γ_{ij} en nombre n^2.

Pour effectuer la décomposition, on peut procéder comme il suit : on a

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \frac{1}{a_{11}} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n)^2 + f_1,$$

f_1 désignant un polynôme homogène du second degré qui ne contient plus x_1; en opérant sur f_1 comme on a opéré sur $\sum a_{ij} x_i x_j$, on peut le décomposer en un carré contenant les variables x_2, x_3, ..., x_n et en une fonction f_2 du second degré ne contenant plus x_1 ni x_2, et ainsi de suite. $\sum a_{ij} x_i x_j$ se trouve ainsi décomposée en n carrés, dont le premier peut contenir toutes les variables, le second toutes les variables excepté x_1, le troisième toutes les variables excepté x_1, x_2, etc.

Cette méthode tombe en défaut quand $a_{11} = a_{22} = \ldots = 0$, mais alors on pose

$$\begin{aligned}\sum a_{ij} x_i x_j = & \frac{1}{a_{12}} (a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n) \\ & \times (a_{21} x_1 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n) + f_1,\end{aligned}$$

(1) Un carré négatif est un carré précédé du signe —.

f_1 désignant un polynôme du second degré ne contenant ni x_1 ni x_2; en appelant X et Y les fonctions linéaires

$$a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \quad \text{et} \quad a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n,$$

on voit que $XY = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2$ et que la fonction $\sum a_{ij}x_ix_j$, dans le cas où $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$, peut se décomposer en deux carrés et en une fonction du second degré, ne contenant plus x_1 et x_2, à laquelle on pourra appliquer l'une ou l'autre des méthodes que nous venons d'indiquer.

Théorème II. — Loi de l'inertie. — *De quelque manière que l'on décompose la fonction réelle $\sum a_{ij}x_ix_j = f$ en une somme de carrés indépendants, on trouve toujours le même nombre de carrés positifs, négatifs ou nuls.*

Pour démontrer ce théorème, nous observerons que, si l'on considère deux groupes de fonctions linéaires et homogènes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ indépendantes, savoir $X_1, X_2, \ldots, X_i$, et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_j$, telles que $i > j$, les fonctions $X_1, X_2, \ldots X_i$ ne sauraient s'annuler toutes identiquement quand on suppose $Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_j = 0$. En effet, les fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_j$ étant indépendantes, on pourra calculer $x_1, x_2, \ldots x_j$ en fonction de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_j$ et de $x_{j+1}, \ldots, x_n$ et, par suite, on pourra exprimer sous forme linéaire et homogène $X_1, X_2, \ldots, X_i$ en fonction de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_j, x_{j+1}, \ldots x_n$. Soit, par exemple,

$$X_k = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_i Y_i + \mu_1 x_{i+1} + \mu_2 x_{i+2} + \ldots + \mu_{n-i} x_n,$$

les λ et les μ désignant des constantes. Si les X s'annulaient, en supposant les Y nuls, on aurait i équations de la forme

$$\mu_1 x_{i+1} + \mu_2 x_{i+2} + \ldots + \mu_{n-i} x_n = 0,$$

qui, ayant lieu quels que soient $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$, donneraient $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\ldots$ $\mu_{n-i} = 0$, et par suite les X

pourraient s'exprimer au moyen des Y, qui sont en nombre moindre que les X : les X ne seraient donc pas distincts.

Cela posé, soient $U_1, U_2, \ldots, U_i, V_1, V_2, \ldots, V_j, X_1, X_2, \ldots, X_k, Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$ des fonctions linéaires et homogènes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telles que les U et les V soient distincts, ainsi que les X et les Y ; on aura nécessairement $i + j \leq n$, $k + l \leq n$. Je dis que l'on ne pourra avoir à la fois

$$\sum a_{ij} x_i x_j = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_i^2 - V_1^2 - V_2^2 - \ldots - V_j^2,$$
$$\sum a_{ij} x_i x_j = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - \ldots - Y_l^2,$$

ou, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_i^2 - V_1^2 - \ldots - V_j^2 = X_1^2 + \ldots \\ + X_k^2 - Y_1^2 - \ldots - Y_l^2, \end{aligned} \right.$$

si l'on n'a pas $i = k$, $j = l$. En effet, supposons que l'on puisse avoir

$$i < k;$$

on aurait aussi

$$(2) \qquad i + l < k + l;$$

mais si l'on suppose $U_1, U_2, \ldots, U_i$ et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$ nuls, les quantités $X_1, X_2, \ldots X_k, Y_k, \ldots, Y_l$ qui sont indépendantes et en nombre supérieur ne s'évanouissent pas identiquement, c'est cependant ce qui aurait lieu en vertu de la formule (1) qui donnerait

$$X_1^2 + \ldots + X_k^2 + V_1^2 + \ldots + V_j^2 = 0,$$

et qui ne pourrait avoir lieu que si tous les X étaient nuls.

Cette démonstration est de Jacobi (*Œuvres mathématiques*, t. III, p. 32), et c'est M. Sylvester qui a donné au théorème précédent le nom de *loi de l'inertie*.

IV. — Transformation d'une fonction du second degré en général.

En général, on peut transformer une fonction du second degré en une autre donnée *a priori* au moyen d'une substitution linéaire, et cela d'une infinité de manières.

En effet, si sur la fonction $\sum a_{ij}x_ix_j$ à n variables, renfermant $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients, on effectue une substitution linéaire, on la transformera en une autre $\sum b_{ij}y_iy_j$; et écrire que les b_{ij} ont des valeurs données, c'est écrire $\frac{n(n+1)}{2}$ relations entre les coefficients γ_{ij} de la substitution au nombre de n^2; or, on a toujours, pour $n > 1$,

$$\frac{n(n+1)}{2} < n^2.$$

Ainsi deux fonctions homogènes du second degré peuvent toujours être transformées l'une dans l'autre au moyen d'une substitution linéaire.

Mais cette propriété n'appartient plus aux fonctions homogènes du troisième degré, qui renferment $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ coefficients, quand elles sont à n variables, et ordinairement

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} > n^2.$$

Il y a donc une infinité de manières de ramener une fonction $\sum a_{ij}x_ix_j$ à la forme $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_2^n$, c'est-à-dire à une somme de carrés par exemple, mais ce nombre de manières est fini et même, le plus souvent, égal à 1 quand on veut que la substitution soit orthogonale.

V. — Réduction d'un polynôme du second degré à une somme de carrés par le moyen d'une substitution orthogonale.

Considérons le polynôme homogène et du second degré

$$\sum a_{ij}x_ix_j = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f.$$

Si nous effectuons la substitution orthogonale

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2 + \ldots + \gamma_{1n}y_n, \\ x_2 = \gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2 + \ldots + \gamma_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \gamma_{n1}y_1 + \gamma_{n2}y_2 + \ldots + \gamma_{nn}y_n, \end{array} \right.$$

où

$$(2)\qquad \begin{cases} \gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu}+\gamma_{2\mu}\gamma_{2\nu}+\ldots+\gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu}=0, \\ \gamma_{1\mu}^2+\gamma_{2\mu}^2+\ldots+\gamma_{n\mu}^2=1, \end{cases}$$

la fonction f prendra la forme

$$f=\sum a_{ij}(\gamma_{i1}y_1+\gamma_{i2}y_2+\ldots)(\gamma_{j1}y_1+\gamma_{j2}y_2+\ldots),$$

et, si l'on fait

$$(3)\qquad \sum a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu}=\begin{cases} A_\mu \text{ pour } \mu=\nu, \\ 0 \text{ pour } \mu \gtrless \nu, \end{cases}$$

on aura simplement

$$(4)\qquad f=A_1y_1^2+A_2y_2^2+\ldots+A_ny_1^n.$$

La fonction f sera donc décomposable en une somme de carrés, s'il est possible de trouver des quantités γ_{ij} satisfaisant aux équations (2) et (3).

Nous ferons, dans ce qui va suivre,

$$f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad f_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2},\quad \ldots,\quad f_n=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_n};$$

or les formules (3), pour $\mu \gtrless \nu$, peuvent s'écrire

$$\gamma_{1\mu}(a_{11}\gamma_{1\nu}+a_{12}\gamma_{2\nu}+\ldots)+\gamma_{2\mu}(a_{21}\gamma_{1\nu}+a_{22}\gamma_{2\nu}+\ldots)+\ldots=0$$

ou bien

$$\gamma_{1\mu}f_1(\gamma_{1\nu},\gamma_{2\nu},\ldots)+\gamma_{2\mu}f_2(\gamma_{1\nu},\gamma_{2\nu},\ldots)+\ldots=0.$$

Comparant cette formule avec la seconde des formules (2), et observant que l'on peut y faire varier μ en laissant ν fixe, on a

$$\frac{f_1(\gamma_{1\nu},\gamma_{2\nu},\ldots)}{\gamma_{1\nu}}=\frac{f_2(\gamma_{1\nu},\gamma_{2\nu},\ldots)}{\gamma_{2\nu}}=\ldots.$$

Si nous égalons cette suite de rapports à une indéterminée s_ν, nous obtenons les équations suivantes, auxquelles nous adjoignons la première formule (2) :

$$(5)\qquad \begin{cases} (a_{11}-s_\nu)\gamma_{1\nu}+a_{12}\gamma_{2\nu}+\ldots+a_{1n}\gamma_{n\nu}=0, \\ a_{21}\gamma_{1\nu}+(a_{22}-s_\nu)\gamma_{2\nu}+\ldots+a_{2n}\gamma_{n\nu}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_{1\nu}+a_{n2}\gamma_{2\nu}+\ldots+(a_{nn}-s_\nu)\gamma_{n\nu}=0, \\ \gamma_{1\nu}^2+\gamma_{2\nu}^2+\ldots+\gamma_{n\nu}^2=1. \end{cases}$$

L'élimination de $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots$ entre les n premières équations, en posant

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \ldots & a_{2n} \\ a_{21}, & a_{22}-s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n1} & \ldots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = F(s),$$

donne

$$F(s_\nu) = 0;$$

s_ν est donc racine de l'équation $F(s) = 0$, que l'on appelle ordinairement l'*équation en s*.

s_ν une fois connu, les formules (5), ou plutôt n d'entre elles, feront connaître $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots$; or, l'équation $F(s) = 0$ est du degré n et admet n racines $s_1, s_2, \ldots, s_n$; chacune de ces racines fera connaître un groupe de n quantités γ_{ij}, et le problème sera résolu.

Si l'on multiplie la première équation (5) par $\gamma_{1\nu}$, la seconde par $\gamma_{2\nu}, \ldots$ et si l'on ajoute, on trouve, en ayant égard à la dernière,

$$\sum a_{ij}\gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu} - s_\nu = 0$$

ou, en vertu de (3),

$$A_\nu - s_\nu = 0 \quad \text{ou} \quad A_\nu = s_\nu;$$

on a donc, en vertu de (4),

$$f = s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + \ldots + s_n y_n^2.$$

VI. — Discussion des résultats précédents.

L'équation en s a toutes ses racines réelles; voici la démonstration que Lagrange donne de cette proposition dans sa *Mécanique analytique* (c'est la première qui ait été donnée; c'est aussi la plus simple).

Soient $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots$ ce que deviennent $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots$ quand on remplace dans (5) s_ν par s_μ; multiplions la première for-

mule (5) par $\gamma_{1\mu}$, la seconde par $\gamma_{2\mu}$; ... la $n^{\text{ième}}$ par $\gamma_{n\mu}$, et ajoutons: nous aurons

$$(6)\qquad \sum a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} - s_\nu(\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu}) = 0.$$

Nous obtiendrions de même, en changeant μ en ν et ν en μ,

$$(7)\qquad \sum a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} - s_\mu(\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu}) = 0.$$

Si l'équation $F(s) = 0$ avait des racines imaginaires (en supposant les a_{ij} réels, bien entendu), on pourrait supposer que s_μ et s_ν sont deux racines conjuguées, et par suite inégales; les deux formules (6) et (7) exigeraient alors que l'on eût

$$\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \gamma_{2\mu}\gamma_{2\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu} = 0,$$

c'est-à-dire que la somme des carrés des modules de $\gamma_{1\nu}$, $\gamma_{2\nu}$, ... fût nulle, ou que ces modules eux-mêmes fussent nuls, ce qui est absurde puisque, le déterminant $F(s)$ étant nul, on peut supposer que les quantités $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots$ ne sont pas toutes nulles; d'ailleurs la somme de leurs carrés est égale à 1.

Mais l'équation $F(s) = 0$ peut avoir des racines égales; pour reconnaître qu'il peut en être ainsi, formons $\frac{dF}{ds}$; on a

$$\frac{dF}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial(a_{11} - s)} - \frac{\partial F}{\partial(a_{22} - s)} - \ldots - \frac{\partial F}{\partial(a_{nn} - s)},$$

et, pour que $F(s) = 0$ ait une racine double, il faut et il suffit que l'on ait à la fois $F = 0$, $\frac{dF}{ds} = 0$. Cette dernière condition peut s'écrire, en introduisant le facteur $\frac{\partial F}{\partial(a_{11} - s)}$,

$$(8)\qquad \left[\frac{\partial F}{\partial(a_{11} - s)}\right]^2 + \frac{\partial F}{\partial(a_{11} - s)}\frac{\partial F}{\partial(a_{22} - s)} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial(a_{11} - s)}\frac{\partial F}{\partial(a_{nn} - s)} = 0.$$

Or on a (p. 161)

$$F\frac{\partial^2 F}{\partial(a_{11} - s)\partial(a_{ii} - s)} = \frac{\partial F}{\partial(a_{11} - s)}\frac{\partial F}{\partial(a_{ii} - s)} - \left(\frac{\partial F}{\partial a_{1i}}\right)^2,$$

d'où l'on conclut que, si $F = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial(a_{11}-s)}\,\frac{\partial F}{\partial a_{ii}-s} = \left(\frac{\partial F}{\partial a_{i1}}\right)^2.$$

La formule (8) devient alors

$$(9)\qquad \left[\frac{\partial F}{\partial(a_{11}-s)}\right]^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial a_{12}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial a_{1n}}\right)^2 = 0,$$

d'où l'on conclut que, si $F = 0$ a une racine double, tous les mineurs de F sont nuls, et réciproquement d'ailleurs, car alors $F'(s)$ sera nul.

Je dis que, en général, si $F(s)$ a une racine d'ordre de multiplicité h, tous les mineurs d'ordre $h - 1$ de $F(s)$ seront nuls. En effet :

1° Les mineurs du premier ordre sont divisibles par $(s-s')^{h-1}$, si $F(s)$ est lui-même divisible par $(s-s')^h$. Ce théorème est vrai pour $h = 1$; admettons qu'il ait lieu pour la valeur $h - 1$ de l'exposant de $s - s'$; alors $F(s)$, admettant le facteur $(s-s')^h$, admettra le facteur $(s-s')^{h-1}$ *a fortiori*, et ses mineurs le facteur $(s-s')^{h-2}$; le premier membre de (9) admettra le facteur $(s-s')^{2h-3}$, car c'est le produit de $F'(s)$ par un mineur de $F(s)$; mais, par suite, il admet nécessairement le facteur $(s-s')^{2h-2}$, et chaque mineur considéré admet le facteur $(s-s')^{h-1}$.

C. Q. F. D.

2° Désignons, pour abréger, $\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}$ par α_{ij} et considérons la formule identique (p. 161)

$$F^{h-2}\frac{\partial^{h-1}F}{\partial a_{ij}\,\partial a_{kl}\ldots\partial a_{pq}} = \begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{kj} & \ldots & \alpha_{pj} \\ \alpha_{il} & \alpha_{kl} & \ldots & \alpha_{pl} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{iq} & \alpha_{kq} & \ldots & \alpha_{pq} \end{vmatrix}.$$

Le second membre admet $(h-1)^2$ fois le facteur $s - s'$: or F^{h-2} l'admet $h(h-2)$ fois : donc un mineur d'ordre $h - 1$ l'admet $(h-1)^2 - h(h-2) = 1$ fois. C. Q. F. D.

Maintenant revenons à notre substitution. Si l'équation $F(s) = 0$ n'a pas de racines multiples, elle sera réelle et elle

existera en effet, les mineurs de F étant différents de zéro; les équations (5), ou plutôt $n-1$ d'entre elles, fourniront, pour les rapports des quantités $\gamma_{i\nu}$, des valeurs réelles.

Si l'équation $F=0$ a une racine double, les rapports des $\gamma_{i\nu}$ seront indéterminés parce que les mineurs de F seront nuls, mais alors un des rapports $\gamma_{1\nu}:\gamma_{2\nu}, \ldots$ pourra être choisi arbitrairement, et la substitution, réduisant F à une somme de carrés, sera possible d'une infinité de manières. L'indétermination serait plus grande encore si F avait une racine d'un ordre de multiplicité plus élevé.

Corollaire. — Si l'on veut savoir en combien de carrés positifs, négatifs ou nuls le polynôme f est décomposable, il suffit de former l'équation en s, $F=0$, et, comme elle a toutes ses racines réelles, le théorème de Descartes montre que f contiendra autant de carrés positifs que $F=0$ a de variations, et autant de carrés négatifs que $F(-s)=0$ a de variations. Le terme constant de l'équation en s est ce que l'on appelle le *discriminant* de f.

Voici maintenant les applications immédiates de cette théorie :

1° Si nous observons que le terme constant de l'équation en s est le discriminant de la fonction f, nous pouvons dire que :

Pour qu'une fonction du second degré homogène de n variables puisse se réduire à une fonction de moins de n variables, il faut que son discriminant soit nul.

En particulier, pour qu'une fonction homogène du second degré à trois variables soit un produit de deux facteurs, il faut que son discriminant soit nul.

2° *Pour qu'une fonction du deuxième degré homogène soit un produit de deux facteurs réels linéaires, c'est-à-dire une différence de deux carrés, il faut que l'équation en s n'ait que deux racines différentes de zéro, l'une positive, l'autre négative.*

3° *Pour qu'une fonction du second degré homogène soit*

un carré parfait, il faut que toutes les racines de l'équation en s soient nulles, sauf une.

4° *Pour qu'une fonction du second degré homogène conserve toujours le même signe, il faut que l'équation en s n'ait que des variations, ou bien que sa transformée en — s n'ait que des variations; cette condition est suffisante : dans le premier cas, la fonction reste toujours positive; dans le second, elle reste toujours négative, etc.*

Cette dernière conclusion est surtout utile dans la théorie des maxima.

VII. — Réduction simultanée de deux fonctions du second degré à des sommes de carrés.

Deux polynômes du second degré $\sum a_{ij}x_i x_j = f$ *et* $\sum b_{ij}x_i x_j = g$ *peuvent toujours être ramenés par une même substitution à une somme de carrés.*

En effet, par une première substitution orthogonale, on peut ramener f à la forme $s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + \ldots + s_n y_n^2$, et g prend alors une forme telle que $\sum c_{ij} y_i y_j$; si l'on fait ensuite la substitution

$$y_1\sqrt{s_1} = z_1,\quad y_2\sqrt{s_2} = z_2,\quad \ldots,\quad y_n\sqrt{s_n} = z_n,$$

on aura

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2,\quad g = \sum d_{ij} z_i z_j.$$

Une dernière substitution orthogonale laissera à f sa forme, tout en ramenant g à une somme de carrés; f et g seront alors tous deux des sommes de carrés.

Maintenant la possibilité de la réduction est établie; il ne peut y avoir exception à la règle que si $s_1, s_2, \ldots$ sont nuls, et alors on peut opérer sur g comme on a opéré sur f, sinon f et g ont leurs discriminants nuls et sont des sommes de moins de n carrés. Dans ce cas, on peut encore réduire f et g à des sommes de carrés, en observant que, ces fonctions

étant des fonctions de moins de n variables, on peut raisonner sur ces fonctions en mettant les variables distinctes en évidence.

Pour effectuer la réduction simultanée des deux formes à des sommes de carrés, on procède comme il suit.

Par la substitution

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = \gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2 + \ldots + \gamma_{1n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \gamma_{n1}y_1 + \gamma_{n2}y_2 + \ldots + \gamma_{nn}y_n, \end{cases}$$

f et g deviennent respectivement

$$f = \sum \mathrm{A}_\mu y_\mu^2, \quad g = \sum \mathrm{B}_\mu y_\mu^2,$$

pourvu que l'on pose

$$(2) \qquad \sum a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad \mu \gtrless \nu, \\ \mathrm{A}_\mu \text{ pour} \quad \mu = \nu; \end{cases}$$

$$(3) \qquad \sum b_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{i\nu} = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad \mu \gtrless \nu, \\ \mathrm{B}_\mu \text{ pour} \quad \mu = \nu. \end{cases}$$

Pour déterminer les γ_{ij}, on remarquera que, si $\mu \gtrless \nu$, ces relations peuvent s'écrire

$$\gamma_{1\mu} f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) + \gamma_{2\mu} f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) + \ldots = 0,$$
$$\gamma_{1\mu} g_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) + \gamma_{2\mu} g_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) + \ldots = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \ldots = \frac{f_n}{g_n}.$$

En égalant ces rapports à λ, on a

$$(4) \qquad \begin{cases} (a_{11} - \lambda b_{11})\gamma_{1\nu} + (a_{12} - \lambda b_{12})\gamma_{2\nu} + \ldots = 0, \\ (a_{21} - \lambda b_{21})\gamma_{1\nu} + (a_{22} - \lambda b_{22})\gamma_{2\nu} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

ces équations donneront, en éliminant les $\gamma_{i\nu}$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \ldots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \ldots & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation $\Lambda = 0$ a n racines qui, mises à la place de λ dans (1), feront connaître les rapports de n systèmes des quantités γ_{ij} et par suite feront connaître la substitution dont on a besoin.

Des équations (4) on tire, en multipliant la première par $\gamma_{1\nu}$, la seconde par $\gamma_{2\nu}$, etc., et en ajoutant,

$$\sum a_{ij}\gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu} - \lambda \sum b_{ij}\gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu} = 0,$$

c'est-à-dire

$$A_\nu = \lambda B_\nu.$$

Comme jusqu'ici les rapports des $\gamma_{i\nu}$ sont seuls déterminés, on peut achever de déterminer ces quantités en se donnant $B_1, B_2, \ldots$, et alors $\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \ldots$ seront les racines de $\Lambda = 0$; ces racines ne sont pas nécessairement réelles.

VIII. — Discussion de la théorie précédente.

Pour que les calculs que nous venons d'esquisser conduisent à des résultats admissibles, il faut :

1° Que l'équation $\Lambda = 0$ ait effectivement n racines;

2° Que les racines de cette équation, mises à la place de λ dans (4), fournissent des valeurs bien déterminées pour les $\gamma_{i\nu}$ ou au moins compatibles;

3° Que les quantités $g(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots, \gamma_{n\mu})$ ne soient pas nulles, car alors les quantités B_μ qui leur sont égales ne pourraient pas être choisies arbitrairement; à la vérité, cela n'empêcherait pas de réduire f et g à des sommes de carrés, mais les fonctions transformées ne seraient pas équivalentes aux proposées, puisqu'elles contiendraient moins de n variables;

4° Il faut encore que la transformation (1) soit ce que j'appellerai *réversible*, c'est-à-dire que son déterminant Γ soit différent de zéro, afin que les y puissent se calculer en fonction des x et que les formes primitives de f et g soient

équivalentes à leurs transformées et que celles-ci puissent réciproquement reproduire les premières.

Nous supposerons le discriminant de g différent de zéro; alors $\Lambda = 0$ aura bien n racines égales ou inégales; s'il n'en était pas ainsi, on opérerait sur f comme on opère sur g, et *vice versâ;* si le discriminant de f était nul aussi, les fonctions f et g ne seraient ni l'une ni l'autre des fonctions de n variables, et, pour faire les calculs, on opérerait sur les fonctions f et g réduites à moins de n variables. Ainsi l'on pourra supposer le discriminant de g différent de zéro. Cela posé :

Théorème. — *Si l'équation* $\Lambda = 0$ *admet pour racine simple* λ_ν, *les mineurs de* Λ *pour cette valeur de* λ *ne seront pas tous nuls, et* $g(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) = B_\nu$ *sera différent de zéro; si* $\Lambda = 0$ *admet* λ_ν *pour racine double, il pourra se faire que les mineurs de* Λ *ne soient pas tous nuls, mais on aura* $g(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) = B_\nu = 0$.

Tous les mineurs de Λ n'étant pas nuls, supposons $\frac{\partial \Lambda}{\partial a_{ij}}$ différent de zéro, de (4) on tirera

$$\gamma_{p\nu} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{ij}} = \gamma_{i\nu} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{pj}},$$

$$\gamma_{q\nu} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{ij}} = \gamma_{j\nu} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{qi}},$$

d'où

$$(a) \qquad \gamma_{p\nu}\gamma_{q\nu} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial a_{ij}}\right)^2 = \gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{pj}} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{qi}} = \gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{pj}} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{iq}};$$

or nous avons vu (p. 161) que

$$\Lambda \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial a_{pj} \partial a_{iq}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{pj}} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{iq}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{pq}} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{ij}},$$

et, comme $\Lambda = 0$,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial a_{pj}} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{iq}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{pq}} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{ij}}.$$

La formule (a) devient alors

$$\gamma_{p\nu}\gamma_{q\nu} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial a_{ij}}\right)^2 = \gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{ij}} \frac{\partial \Lambda}{\partial a_{pq}},$$

et, en supposant $\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} \gtrless 0$,

$$\gamma_{p\nu}\gamma_{q\nu}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = \gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{pq}};$$

on en conclut

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}}\sum b_{pq}\gamma_{p\nu}\gamma_{q\nu} = \sum \gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu}\frac{\partial \Delta}{\partial a_{pq}}b_{pq} = -\frac{d\Delta}{d\lambda_\nu}\gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu}$$

ou bien

$$(b) \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}}g(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) = -\frac{d\Delta}{d\lambda_\nu}\gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu}.$$

Donc $g(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)$ sera nul ou différent de zéro, suivant que $\frac{d\Delta}{d\lambda_\nu}$ sera lui-même nul ou différent de zéro, car $\gamma_{i\nu}$, $\gamma_{j\nu}$ ne peuvent être nuls; en effet, si $\gamma_{i\nu}$ était nul, le système (4) se réduirait à $n-1$ équations homogènes dont le déterminant serait différent de zéro; par hypothèse, ce déterminant étant $\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}}$, il faudrait alors que tous les $\gamma_{i\nu}$ fussent nuls.

Ainsi B_ν pourra être choisi arbitrairement, si $\Delta = 0$ n'a pas λ_ν pour racine multiple.

Au contraire, la transformation ne sera pas possible, si $\Delta = 0$ admet λ_ν pour racine double; ces conclusions tombent en défaut quand tous les mineurs de Δ sont nuls.

Examinons ce cas. A cet effet, faisons varier les coefficients de la forme f, et désignons par un δ une différentielle totale relative aux coefficients a_{ij} de cette forme; si l'on différentie la formule (b) avec la caractéristique δ, on a, en écrivant g au lieu de $g(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)$ et en négligeant les termes nuls,

$$g\left[\sum \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ij}\partial a_{kl}}\delta a_{kl} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial\lambda_\nu \partial a_{ij}}\delta\lambda_\nu\right]$$
$$= -\sum \frac{\partial^2 \Delta}{\partial\lambda_\nu \partial a_{kl}}\delta a_{kl}\gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu} - \frac{\partial^2 \Delta}{\partial\lambda_\nu^2}\delta\lambda_\nu\gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu};$$

choisissons les δa de manière à annuler le premier terme du second membre, nous aurons

$$(c) \qquad g\left[\sum \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ij}\partial a_{kl}}\delta a_{kl} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial\lambda_\nu \partial a_{ij}}\delta\lambda_\nu\right] = -\frac{\partial^2 \Delta}{\partial\lambda_\nu^2}\delta\lambda_\nu\gamma_{i\nu}\gamma_{j\nu}.$$

Or $\delta\lambda_\nu$ n'est pas nul; car, en différentiant $\Lambda = 0$ deux fois, on a

$$\frac{d^2\Lambda}{d\lambda_\nu^2}\delta\lambda_\nu^2 + 2\sum \frac{d}{d\lambda_\nu}\frac{\partial\Lambda}{\partial a_{kl}}\delta\lambda_\nu\,\delta a_{kl} + \sum \frac{\partial^2\Lambda}{\partial a_{ij}\,\partial a_{kl}}\delta a_{ij}\,\delta a_{kl} = 0,$$

formule dans laquelle le second terme est nul, et d'où l'on tire, en général, pour $\delta\lambda_\nu$, deux valeurs différentes de zéro : la formule (c) nous montre donc que g n'est pas nul si $\frac{d^2\Lambda}{d\lambda_\nu^2}$ n'est pas nul, c'est-à-dire si λ_ν n'est pas racine triple de $\Lambda = 0$.

On verrait, en continuant cette discussion, que g ou B_ν pourra toujours être pris arbitrairement si λ_ν, étant racine d'ordre de multiplicité h de $\Lambda = 0$, tous les mineurs d'ordre $h+1$ de Λ sont nuls. Le contraire aura lieu si tous ces mineurs ne sont pas nuls.

Voici maintenant les conséquences à tirer de là :

1° Si l'équation $\Lambda = 0$ a toutes ses racines inégales, les équations (4) fourniront des valeurs bien déterminées des γ_{ij} pour lesquelles les B_ν ne seront pas nuls, et la transformation (1) sera réversible; c'est ce que prouvent les formules (2) et (3), en vertu desquelles

$$\Gamma \begin{vmatrix} g_1(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}) & g_2(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}) & \ldots \\ g_1(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2n}) & g_2(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2n}) & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} = B_1 B_2 \ldots B_n.$$

2° Si l'équation $\Lambda = 0$ a une racine double, on ne pourra pas, en général, ramener f et g simultanément à des sommes de carrés par une substitution linéaire réversible, la valeur correspondante de g étant nulle.

3° Si cependant l'équation $\Lambda = 0$ avait une racine double, tous les mineurs de Λ étant nuls, les équations (4) donneraient pour les quantités γ une infinité de valeurs admissibles, les rapports de ces quantités étant déterminées dès que l'on se donne l'un d'eux; les valeurs correspondantes de g ou de B ne seraient pas nulles et la réduction à une somme de carrés pourrait encore s'effectuer au moyen d'une substitution réversible, etc.

IX. — Invariants et covariants.

Les fonctions entières et homogènes portent souvent le nom de *formes;* ces formes sont *quadratiques, cubiques,* etc., quand elles sont du deuxième, du troisième degré, etc. Elles sont *binaires, ternaires, quaternaires,* etc., quand elles sont à 2, 3, 4, ... variables.

Soient a_{11}, a_{12}, ... les coefficients d'une forme

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

soient a_{21}, a_{22}, ... ceux d'une seconde forme f_2, etc. Si nous effectuons une substitution linéaire, les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ deviendront des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et si a_{ij} désigne le coefficient de $x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\lambda$ dans f_i, nous représenterons par b_{ij} le coefficient de $y_1^\alpha y_2^\beta \ldots y_n^\lambda$ dans la fonction en laquelle se transformera f_i. Cela posé, si l'on a

$$\begin{aligned}&\varphi(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{21}, b_{22}, \ldots; y_1, y_2, \ldots, y_n)\\ &\quad = \Gamma^h \varphi(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots; x_1, x_2, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

Γ^h désignant une puissance du déterminant de la substitution, on dira que la fonction φ est un *covariant* des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Si l'on a seulement

$$\varphi(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{21}, b_{22}, \ldots) = \Gamma^h \varphi(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots),$$

la fonction φ ne contenant pas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on dira que φ est un *invariant* des formes $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Voici quelques exemples d'invariants et de covariants :

Théorème I. — *Le déterminant fonctionnel de plusieurs fonctions est un covariant de ces fonctions.*

En effet, soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions de x_1, $x_2, \ldots, x_n$; effectuons la substitution

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 + \ldots + \gamma_{1n} y_n,\\ x_2 &= \gamma_{21} y_1 + \gamma_{22} y_2 + \ldots + \gamma_{2n} y_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\ x_n &= \gamma_{n1} y_1 + \gamma_{n2} y_2 + \ldots + \gamma_{nn} y_n;\end{aligned}\right.$$

nous aurons $\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \gamma_{ij}$; or

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \Gamma \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Le déterminant fonctionnel sera donc, en général, un covariant; cependant, si les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ étaient du premier degré, les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n'y seraient plus contenues, et il deviendrait un invariant.

Théorème II. — *Le hessien d'une fonction est un covariant de cette fonction, qui se trouve multiplié par le carré du module de la substitution à laquelle on soumet ses variables.*

Soit, en effet, f une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$, et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ après que l'on a effectué la substitution (1): on a

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)} \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}.$$

Le premier membre est le hessien de f relatif à $y_1, y_2, \ldots, y_n$, appelons-le H_y; le second facteur du second membre est le hessien H_x de f relatif aux variables x, le dernier facteur est le déterminant Γ; on a donc

$$(2) \qquad H_y = \Gamma H_x \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}.$$

Or

$$\varphi_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1} = f_1\gamma_{11} + f_2\gamma_{21} + \ldots + f_n\gamma_{n1},$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial f}{\partial y_2} = f_1\gamma_{12} + f_2\gamma_{22} + \ldots + f_n\gamma_{n2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

donc, en général, $\frac{\partial z_i}{\partial f_j} = \gamma_{ji}$, et par suite la formule (2) devient

$$H_y = H_x \Gamma^2.$$

Le hessien est donc bien, en général, un covariant; toutefois, si f était du second degré, le hessien se réduirait à une constante que l'on appelle quelquefois le *discriminant de la fonction du second degré* f et qui serait un invariant de cette fonction.

Ainsi, par exemple, le hessien de la fonction

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

est égal à

$$B^2 - AC;$$

le hessien de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$

est le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0.$$

Voici de nouveaux exemples de covariants.

X. — Émanants.

f désignant une fonction homogène de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de degré m, l'expression

$$Pf = x'_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x'_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

est ce que l'on appelle le *premier émanant de* f; le symbole $x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ est commutatif et distributif, et, par suite, l'opération $P^n f$ pourra se développer par la formule du binôme; $P^2 f$, $P^3 f$, ... sont les deuxième, troisième, etc. émanants de f.

Théorème. — *Tous les émanants de la fonction f sont des covariants de cette fonction.*

En effet, on a, en effectuant la substitution (1) du paragraphe précédent,

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\gamma_{11} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma_{21} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\gamma_{n1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\gamma_{12} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma_{22} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\gamma_{n2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si dans les formules (1) on accentue les x et les y, on en tire

$$y'_1 = \frac{1}{\Gamma}\left[x'_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{11}} + x'_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{21}} + \ldots + x'_n \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{n1}}\right],$$

$$y'_2 = \frac{1}{\Gamma}\left[x'_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{12}} + x'_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{22}} + \ldots + x'_n \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{n2}}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

donc

$$\sum y'_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{1}{\Gamma}\sum\left(x'_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{1i}} + x'_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{2i}} + \ldots\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\gamma_{1i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma_{2i} + \ldots\right).$$

Or, dans le second membre, le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial x_\mu} x'_\mu$ est égal à

$$\sum \frac{1}{\Gamma}\gamma_{\mu i}\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{\mu i}},$$

c'est-à-dire à l'unité. Le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial x_\mu} x'_\nu$ est égal à

$$\sum \frac{1}{\Gamma}\gamma_{\mu i}\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_{\nu i}},$$

c'est-à-dire à zéro; on a donc rigoureusement

$$\sum y'_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et le premier émanant d'une forme est un covariant absolu de cette forme.

Il est bien clair que, si l'on répète sur la fonction

$$\sum y'_i \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

l'opération P, elle restera encore invariable par la substitu-

tion. Mais on peut donner de ce théorème une démonstration plus simple : on a

$$\begin{aligned} f(x_1+tx'_1, x_2+tx'_2, \ldots, x_n+tx'_n) \\ = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{t}{1!}\mathrm{P}f + \frac{t^2}{2!}\mathrm{P}^2 f + \ldots \\ + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{P}^{m-1}f + t^m f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n). \end{aligned}$$

Soit g la fonction transformée de f par la substitution (1); on aura

$$\begin{aligned} g(y_1+ty'_1, t_2+ty'_2, \ldots) \\ = g(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \frac{t}{1}\mathrm{P}g + \frac{t^2}{2!}\mathrm{P}^2 g + \ldots \\ + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{P}^{m-1}g + t^m g(y'_1, \ldots, y'_n); \end{aligned}$$

or on a

$$f(x_1, x_2, \ldots) = g(y_1, y_2, \ldots)$$

et, par suite,

$$f(x_1+tx'_1, \ldots) = g(y_1+ty'_1, \ldots).$$

Les coefficients de t^i dans les développements des deux membres de cette équation devant être égaux, on aura

$$\mathrm{P}^i f = \mathrm{P}^i g.$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — *Il est bon d'observer que l'on a, à un facteur numérique près,*

$$\left(x'_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x'_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots\right)^h f = \left(x_1\frac{\partial}{\partial x'_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x'_2} + \ldots\right)^{m-h} f.$$

Ces deux expressions sont les termes de degré h en x'_1, x'_2, ... ou de degrés $m-h$ en x_1, x_2, ... du développement par la formule de Taylor de la fonction

$$f(x_1+x'_1, x_2+x'_2, \ldots).$$

Nous trouverons plus loin une interprétation géométrique remarquable de la théorie des émanants.

Théorème. — *Le hessien d'une fonction n'est autre chose que le discriminant de son second émanant.*

En effet, le second émanant de f est

$$\sum x'_i x'_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

dont le discriminant relatif aux variables x'_i est

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire le hessien de f.

XI. — Contrevariants et divariants.

Des variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui doivent être transformées par la même substitution, sont dites *cogrédientes;* au contraire, si ces variables devaient être transformées, les unes par une substitution, les autres par la substitution inverse, on dirait qu'elles sont *contragrédientes*. Je rappelle que les substitutions

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 + \ldots + \gamma_{1n} y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \gamma_{n1} y_1 + \gamma_{n2} y_2 + \ldots + \gamma_{nn} y_n \end{cases}$$

et

$$(2) \qquad \begin{cases} y_1 = C_{11} x_1 + C_{12} x_2 + \ldots + C_{1n} x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = C_{n1} x_1 + C_{n2} x_2 + \ldots + C_{nn} x_n \end{cases}$$

sont dites inverses l'une de l'autre quand on a, en général,

$$\gamma_{ij} = C_{ji}.$$

Pour donner un exemple du cas où, dans une même question, il peut se présenter des variables contragrédientes, considérons une forme linéaire

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n.$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que, si l'on applique aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la substitution (1), les coefficients a_1, $a_2, \ldots, a_n$, considérés comme des variables, subiront la substitution inverse; et, en effet, la substitution (1) transforme la fonction linéaire en question dans cette autre

$$a_1(\gamma_{11}y_1+\gamma_{12}y_2+\ldots)+a_2(\gamma_{21}y_1+\gamma_{22}y_2+\ldots)+\ldots=0,$$

de sorte que, en appelant $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les coefficients de y_1, $y_2, \ldots, y_n$, c'est-à-dire de la nouvelle forme, on a

$$\begin{aligned}
b_1 &= \gamma_{11}a_1+\gamma_{21}a_2+\ldots+\gamma_{n1}a_n,\\
b_2 &= \gamma_{12}a_1+\gamma_{22}a_2+\ldots+\gamma_{n2}a_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont donc transformées par des substitutions inverses : elles sont ce que nous avons appelé des *variables contragrédientes*.

Maintenant, soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ des variables contragrédientes; soient $a, a', a'', \ldots$ les coefficients de certaines formes pouvant renfermer, outre les variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$, les variables contragrédientes $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Appliquons à ces formes une même substitution linéaire transformant $x_1, x_2, \ldots$ en $y_1, y_2, \ldots$ et $x'_1, x'_2, \ldots$ (par la substitution inverse) en $y'_1, y'_2, \ldots$; soient b, b', b'' les nouveaux coefficients de ces formes; soient enfin Γ le déterminant de la substitution que l'on a effectuée sur les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ω un exposant quelconque. Si l'on a

$$\begin{aligned}
&\varphi(a, a', \ldots; x_1, x_2, \ldots; x'_1, x'_2, \ldots)\\
&\qquad=\Gamma^{\omega}\varphi(b, b', \ldots; y_1, y_2, \ldots; y'_1, y'_2, \ldots),
\end{aligned}$$

on dira que φ est un *divariant* ou un *covariant mixte*; si la fonction φ ne renfermait pas les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, elle porterait le nom de *contrevariant*.

On verra bientôt qu'il existe un grand nombre de divariants; en voici un qui appartient à toutes les formes : c'est l'expression

$$x_1x'_1+x_2x'_2+\ldots+x_nx'_n=\sum x_ix'_i.$$

En effet,

$$\sum x_i x'_i = \sum (\gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 + \ldots + \gamma_{in} y_n) x'_i$$
$$= \sum (\gamma_{1\mu} x'_1 + \gamma_{2\mu} x'_2 + \ldots + \gamma_{n\mu} x'_n) y_\mu ;$$

mais, les variables x' étant transformées par la substitution inverse, on a

$$\gamma_{1\mu} x'_1 + \gamma_{2\mu} x'_2 + \ldots + \gamma_{n\mu} x'_n = y'_\mu ;$$

donc enfin

$$\sum x_i x'_i = \sum y_i y'_i,$$

et l'expression $\sum x_i x'_i$ est bien un divariant de toutes les formes.

XII. — Des évectants.

M. Sylvester a donné le nom d'*évectants* à des contrevariants que l'on obtient comme il suit :

Soit $f(x_1, x_2, \ldots)$ une forme ayant pour coefficients $a, a', \ldots$ et de degré m; soient $\xi_1, \xi_2, \ldots$ des variables contragrédientes, $g(y_1, y_2, \ldots)$ la fonction transformée par une substitution de déterminant Γ, et $\eta_1, \eta_2, \ldots$ les variables contragrédientes avec $y_1, y_2, \ldots$. Considérons la fonction suivante, où λ est une constante arbitraire,

(1) $$f + \lambda(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \ldots)^m;$$

par la substitution, elle deviendra, en observant que

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \ldots$$

est un contrevariant,

(2) $$g + \lambda(y_1 \eta_1 + y_2 \eta_2 + \ldots)^m.$$

Soit $\varphi(a, a', a'', \ldots)$ un invariant de f; on aura

$$\varphi(b, b', b'', \ldots) = \Gamma^{\omega} \varphi(a, a', a'', \ldots),$$

et, en remplaçant les coefficients $a, a', \ldots$ et $b, b', \ldots$ par

ceux des formes (1) et (2),

$$\varphi(b + \lambda \eta_1''' + \ldots) = \Gamma^{\omega} \varphi(a + \lambda \xi_1''' + \ldots).$$

Les coefficients des mêmes puissances de λ sont égaux; ainsi les coefficients de λ^0, λ, λ^2, ... dans $\varphi(a + \lambda \xi_1''' + \ldots)$ sont des contrevariants, le coefficient de λ^i est le $i^{\text{ième}}$ *évectant* de f relatif à l'invariant φ.

XIII. — Recherche des invariants.

Théorème. — *Le nombre des invariants d'une ou de plusieurs formes est nécessairement limité* (il s'agit, bien entendu, d'invariants distincts, c'est-à-dire tels qu'aucun d'eux ne soit fonction des autres).

En effet, soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les anciennes variables; $a, a', \ldots$ les anciens coefficients d'une ou plusieurs formes; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les nouvelles variables; $b, b', \ldots$ les nouveaux coefficients; Δ le déterminant de la substitution. Si $\varphi(a, a', \ldots)$, $\psi(a, a', \ldots)$ sont des invariants, on aura

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(a, a', \ldots) = \Delta^{\alpha} \varphi(b, b', \ldots), \\ \psi(a, a', \ldots) = \Delta^{\beta} \psi(b, b', \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

L'élimination de Δ donnera des relations telles que

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi(a, a', \ldots, b, b', \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

or il ne peut exister qu'un nombre limité de relations entre les coefficients $a, a', \ldots, b, b', \ldots$ obtenues en éliminant les coefficients de la substitution entre les relations qui donnent les b en fonction des a; donc le nombre des relations (2) est limité, et par suite aussi celui des relations (1); donc, etc. C. Q. F. D.

Une forme quadratique ne peut avoir qu'un seul invariant qui est son discriminant; car toute fonction quadratique

peut se transformer dans une autre donnée à l'avance; donc il ne saurait exister de relations entre les coefficients de la proposée et de la transformée : c'est ce dont on s'assure aisément en faisant effectivement la substitution et en égalant à des arbitraires les coefficients de la transformée. Soit n le nombre des variables, celui des coefficients est $\frac{n(n+1)}{2}$; on aura donc $\frac{n(n+1)}{2}$ équations à écrire pour déterminer les n^2 coefficients de la transformation : or n^2 est toujours supérieur à $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$, car $n < n^2$.

On verrait de même qu'une forme cubique binaire n'a qu'un seul invariant.

Quand on connaît les invariants d'une forme de degré n, on peut trouver les invariants de plusieurs formes de même degré.

En effet, soient $\varphi(x_1, \ldots; a_1, a_2, \ldots)$, $\psi(x_1, \ldots; a'_1, a'_2, \ldots)$, $\theta(x_1, x_2, \ldots; a''_1, a''_2, \ldots)$, ... des formes d'ordre n; considérons la forme unique

$$\varphi + \lambda\psi + \mu\theta + \ldots.$$

Soit $\mathrm{H}(a_1, a_2, \ldots)$ un invariant de la forme φ; alors

$$\mathrm{H}(a_1 + \lambda a'_1 + \mu a''_1 + \ldots; a_2 + \lambda a'_2 + \mu a''_2 + \ldots)$$

sera un invariant de $\varphi + \lambda\psi + \mu\theta + \ldots$. En appelant alors $b_1, b_2, \ldots; b'_1, b'_2, \ldots$ les coefficients des formes transformées, on aura

$$\mathrm{H}(a_1 + \lambda a'_1 + \mu a''_1 + \ldots) = \Delta^\omega \mathrm{H}(b_1 + \lambda b'_1 + \mu b''_1 + \ldots),$$

Δ désignant le déterminant de la substitution. Cette formule devant subsister, quels que soient $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, les coefficients de $\lambda^i \mu^j \nu^k \ldots$ doivent être égaux. Soient u et $\Delta^\omega v$ ces coefficients; on aura $u = \Delta^\omega v$: donc u est un invariant des formes $\varphi, \psi, \theta, \ldots$.

Le nombre des invariants d'une forme φ est égal au plus au nombre des relations qui peuvent exister entre les coeffi-

cients de φ et de sa transformée, augmenté de 1. Soient donc m le degré de φ, n le nombre de ses variables; le nombre de ses coefficients sera

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)};$$

on pourra donc écrire un pareil nombre d'équations en égalant les coefficients de la transformée à des nombres $b_1, b_2, \ldots$. Or les coefficients de la substitution sont au nombre de n^2 : donc il existe

$$(1)\qquad \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} - n^2$$

relations entre les coefficients de φ et de sa transformée, et par suite

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} - n^2 + 1$$

invariants. Ce nombre se réduit à 1 quand le nombre (1) est négatif, mais c'est là une limite supérieure.

On trouverait de même une limite supérieure du nombre des invariants de plusieurs formes du même degré.

XIV. — Méthodes générales pour former des invariants, des covariants, des contrevariants et des divariants.

Théorème fondamental. — *Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction homogène de degré quelconque; si l'on effectue la substitution*

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2 + \ldots + \gamma_{1n}y_n,\\ x_2 &= \gamma_{21}y_2 + \gamma_{22}y_2 + \ldots + \gamma_{2n}y_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_n &= \gamma_{n1}y_1 + \gamma_{n2}y_2 + \ldots + \gamma_{nn}y_n,\end{aligned}\right.$$

les dérivées de f prises par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont transformées par la substitution inverse.

Cela résulte immédiatement des formules générales pour le changement de variable indépendante; on a en effet

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\gamma_{11} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma_{21} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\gamma_{n1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\gamma_{12} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\gamma_{22} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\gamma_{n2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Voici maintenant comment on peut déduire d'un contrevariant une série de covariants.

Soit

$$\varphi(\ldots a_i \ldots x_i \ldots x'_i \ldots)$$

un contrevariant de la fonction f, a_i désignant l'un de ses coefficients et x'_i l'une des variables transformées par la substitution inverse; si nous remplaçons x'_i par le symbole opératoire $\frac{\partial}{\partial x_i}$, nous obtiendrons un symbole opératoire

$$\varphi\left(\ldots a_i \ldots x_i \ldots \frac{\partial}{\partial x_i} \ldots\right)$$

qui, appliqué à la fonction f ou à un de ses covariants, fournira un nouveau covariant (ou un invariant si les variables x_i n'entrent pas dans le résultat).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

est un contrevariant de $a_{11}^2 x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}^2 x_2$; en le développant après avoir remplacé ξ par $\frac{\partial f}{\partial x}$, on a

$$2\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}a_{12} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 a_{22} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 a_{11},$$

et cette expression est un covariant qui, développé, s'écrit

$$\begin{aligned} &2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)a_{12} \\ &\quad - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 a_{22} - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2 a_{11}. \end{aligned}$$

L'expression

$$2a_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - a_{11}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - a_{22}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

fournit un invariant

$$2a_{12}^2 - 2a_{11}a_{22}.$$

En appliquant le symbole $\varphi\left(\ldots a_i \ldots x_i \ldots \frac{\partial}{\partial x_i} \ldots\right)$ à un divariant, on en déduirait un nouveau divariant (ou un contrevariant si les variables x disparaissaient d'elles-mêmes).

Théorème II. — *Connaissant un invariant d'une forme quelconque, on en déduit un covariant pour une forme de degré plus élevé.*

En effet, soit $\varphi(\ldots a_i \ldots)$ un invariant d'une forme f de degré m; formons l'émanant d'ordre m d'une fonction quelconque F, et soit

$$\left(x'_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots\right)^m$$

cet émanant. Considérons dans cet émanant $x'_1, x'_2, \ldots$ comme les variables d'une forme, et formons l'invariant $\varphi(\ldots a_i \ldots)$ pour cette forme; le résultat sera un covariant de la forme F.

Exemple. — L'expression $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ est l'invariant de

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2;$$

donc

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}$$

sera un covariant de F.

De même un covariant pour une forme de degré élevé peut devenir un simple invariant pour une autre forme de degré moindre.

Formons le discriminant de l'émanant

$$\left(x'_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x'_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots\right)^2,$$

et nous avons le hessien de F, ainsi qu'on l'a déjà observé.

XV. — Invariants des formes quadratiques.

Nous avons déjà remarqué qu'une forme quadratique n'avait qu'un invariant, à savoir son discriminant ou hessien.

Si l'on considère deux formes quadratiques

$$f = \sum a_{ij}x_ix_j \quad \text{et} \quad \sum b_{ij}x_ix_j = g,$$

les coefficients des transformées s'exprimeront à l'aide des coefficients des proposées et des n^2 coefficients de la substitution, ce qui fournira

$$n(n+1) - n^2 = n$$

relations possibles entre les anciens et les nouveaux coefficients; le nombre des invariants est donc au plus $n+1$. On les trouvera par la règle donnée (p. 258) et l'on formera le discriminant de $f - \lambda g$; les coefficients de $\lambda^0, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}, \lambda^n$ seront les invariants cherchés. On peut remarquer que ce sont les coefficients de l'équation qui nous a servi à réduire f et g simultanément à des sommes de carrés.

Un raisonnement analogue donnerait les invariants d'un plus grand nombre de formes.

Une substitution orthogonale n'altérant pas la fonction $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, si l'on considère l'expression

$$\sum a_{ij}x_ix_j - s(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

l'équation en s qui sert à ramener $\sum a_{ij}x_ix_j$ à une somme de carrés aura pour coefficients des invariants de $\sum a_{ij}x_ix_j$, relatifs à toute substitution orthogonale, si je puis m'exprimer ainsi, c'est-à-dire que ces coefficients ne changeront pas quand $\sum a_{ij}x_ix_j$ subira une transformation orthogonale. Cette propriété est précieuse et nous en ferons l'application à la

recherche des paramètres d'un paraboloïde donné par son équation

$$(a)\quad \begin{cases} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz \\ \qquad + 2B''xy + 2Ctx + 2C'ty + 2C''tz + Dt^2 = 0. \end{cases}$$

On simplifie cette équation au moyen de deux substitutions successives équivalentes à la substitution unique de déterminant 1 :

$$\begin{aligned} x &= a\,x' + b\,y' + c\,z' + \alpha t', \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' + \beta t', \\ z &= a''x' + b''y' + c''z' + \gamma t', \\ t &= 0\,x' + 0\,y' + 0\,z' + 1.t'; \end{aligned}$$

$a, b, c, a'\ldots$ sont les neuf cosinus bien connus dont le déterminant est 1; α, β, γ sont les coordonnées de la nouvelle origine. Soit

$$(b)\qquad sx'^2 + s'y'^2 - 2Qz = 0$$

l'équation simplifiée du paraboloïde; s et s' sont, comme l'on sait, les racines de l'équation en s; quant à Q, on l'obtiendra en écrivant que le discriminant n'a pas changé.

En appelant donc Δ l'ancien discriminant, celui du premier membre de (a), et observant que celui du premier membre de (b) est $-Q^2ss'$,

$$Q^2ss' = -\Delta, \quad \text{d'où} \quad Q = \sqrt{-\frac{\Delta}{ss'}}.$$

XVI. — Contrevariants et divariants des formes du second degré.

Soit $f = \sum a_{ij}x_ix_j$ une fonction homogène du second degré; si l'on pose

$$(1)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \xi_1, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} = \xi_2, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_n} = \xi_n,$$

on aura ainsi une substitution linéaire. Si on la fait subir à la fonction f, on obtiendra une fonction $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ que l'on appelle avec Gauss la *fonction adjointe de f*. Nous verrons bientôt que cette fonction est un contrevariant.

Nous allons apprendre à former la fonction adjointe. De (1) on tire

$$f = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \ldots + x_n \xi_n, \tag{2}$$

qui n'est autre chose que l'expression pure et simple du théorème des fonctions homogènes : pour obtenir la fonction adjointe, il suffira d'éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre (1) et (2), où l'on remplacera f par φ. Or le système (1) peut s'écrire

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = \xi_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = \xi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = \xi_n, \end{array}\right. \tag{3}$$

et la résultante est

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \xi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & \xi_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n & \varphi \end{vmatrix} = 0. \tag{3 bis}$$

On a donc, en appelant Δ le discriminant de la fonction f,

$$\Delta \varphi = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \xi_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \xi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & \xi_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n & 0 \end{vmatrix} \tag{4}$$

ou bien encore

$$\Delta \varphi = \sum \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} \xi_i \xi_j. \tag{5}$$

Des formules (3) on peut tirer la substitution

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2 + \ldots + \alpha_{1n} \xi_n, \\ x_2 = \alpha_{21} \xi_1 + \alpha_{22} \xi_2 + \ldots + \alpha_{2n} \xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \alpha_{n1} \xi_1 + \alpha_{n2} \xi_2 + \ldots + \alpha_{nn} \xi_n, \end{array}\right. \tag{6}$$

et alors la formule (5) peut encore s'écrire

$$\varphi = \sum \alpha_{ij} \xi_i \xi_j. \tag{7}$$

Théorème I. — *Lorsque le discriminant Δ de f s'annule, la fonction adjointe φ est un carré parfait.*

Il y a là une sorte de paradoxe; en effet, φ et f étant identiques, on peut se demander comment, f n'étant pas nécessairement un carré, φ doit en être un; mais il faut alors considérer φ comme défini non plus par l'équation (7), mais bien par l'équation (5), où $\Delta\varphi$ lui-même sera la fonction adjointe. Ainsi, dorénavant, c'est l'expression $\sum \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} \xi_0 \xi_j$ que nous appellerons la *fonction adjointe*.

Si f est un carré parfait, l'équation en s a $n-1$ racines nulles; donc, pour $s=0$, tous les mineurs du premier membre de l'équation en s doivent être nuls jusqu'à l'ordre $n-2$.

Maintenant on sait que l'on a

$$\Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{ij}\, \partial a_{kl}} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{kl}} - \frac{\partial \Delta}{\partial a_{il}} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{kj}};$$

comme Δ est nul par hypothèse, on voit que tous les mineurs du second degré du discriminant de $\sum \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} \xi_i \xi_j$ sont nuls: $\Delta\varphi$ est donc bien un carré parfait. C. Q. F. D.

Théorème II. — *La fonction adjointe $\Delta\varphi$ est un contrevariant.*

En effet, la fonction adjointe peut s'obtenir, ainsi qu'on le voit à l'inspection de la formule (3), en égalant à zéro le discriminant de

$$\Theta = \sum a_{ij} x_i x_j + 2 x_{n+1} \left(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \ldots + x_n \xi_n + x_{n+1} \frac{\varphi}{2} \right).$$

Effectuons la substitution

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 + \ldots + \gamma_{1n} y_n, \\ x_2 = \gamma_{21} y_1 + \gamma_{22} y_2 + \ldots + \gamma_{2n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \gamma_{n1} y_1 + \gamma_{n2} y_2 + \ldots + \gamma_{nn} y_n. \end{cases}$$

et la substitution inverse

$$(9)\quad \begin{cases} \eta_1 = \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{21}\xi_2 + \ldots + \gamma_{n1}\xi_n, \\ \eta_2 = \gamma_{12}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \ldots + \gamma_{n2}\xi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta_n = \gamma_{1n}\xi_1 + \gamma_{2n}\xi_2 + \ldots + \gamma_{nn}\xi_n. \end{cases}$$

La fonction Θ deviendra

$$H = \sum b_{ij} y_i y_j + 2x_{n+1}\left(y_1\eta_1 + \eta_2 y_2 + \ldots + \eta_n y_n + x_{n+1}\frac{\varphi}{2}\right),$$

$\sum b_{ij}\eta_i y_j$ désignant ce que devient $\sum a_{ij} x_i x_j$ par la substitution (8). La fonction adjointe de $\sum b_{ij} y_i y_j$ s'obtient précisément en égalant à o le discriminant de H; or $H = \Theta\Gamma^2$, en appelant Γ le déterminant de la substitution (8) : il en résulte que les valeurs de φ tirées de $\Theta = 0$ ou de $H = 0$ sont égales : donc enfin la fonction adjointe φ ou $\Delta\varphi$ est un contrevariant de f.

Si $f = 0$ est l'équation d'une conique ou d'une surface du second degré, ..., $\varphi = 0$, φ désignant la fonction adjointe, est l'équation de la polaire réciproque de $f = 0$ prise par rapport au cercle ou à la sphère imaginaire

$$\sum x_i^2 = 0.$$

Théorème III. — *Appelons $g = \Delta\varphi$ la fonction adjointe de f; la fonction adjointe de g sera $f\Delta^{n-2}$.*

Nous avons trouvé

$$\Delta\varphi = g = \sum \frac{\partial\Delta}{\partial a_{ij}}\xi_i\xi_j = \sum \alpha_{ij}\xi_i\xi_j;$$

si l'on appelle D le déterminant $\sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn}$, la fonction h adjointe de g sera

$$h = \sum \frac{\partial D}{\partial \alpha_{ij}} z_i z_j.$$

et l'on aura

$$z_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{in}\xi_n.$$

C'est précisément la valeur de x_i tirée de (6); on a donc

$$h = \sum \frac{\partial D}{\partial \alpha_{ij}} x_i x_j;$$

mais, en résolvant les équations (6), on aurait

$$\xi_i = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \alpha_{1i}} x_1 + \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \alpha_{2i}} x_2 + \ldots.$$

Comparant les formules avec (2), il vient

$$\frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \alpha_{ji}} = a_{ji}, \quad \frac{\partial D}{\partial \alpha_{ji}} = D a_{ij};$$

on a donc

$$h = D \sum a_{ij} x_i x_j = D f = \Delta^{n-1} f.$$

C. Q. F. D.

Il résulte de là que, si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées d'un point, les figures $f = 0$ et $g = 0$ jouiront d'une certaine réciprocité l'une par rapport à l'autre. Ce mode de dépendance sera étudié plus tard.

XVII. — Sur les combinants.

On appelle *combinant* de n formes homogènes à n variables

$$f_1(a_1, a'_1, \ldots, x_1, \ldots, x_n), \quad f_2(a_2, a'_2, \ldots, x_1, \ldots, x_n), \ldots f_n,$$

où les a représentent les coefficients et les x les variables, une fonction qui jouit de la propriété de se reproduire par la substitution

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha_{11} f_1 + \alpha_{12} f_2 + \ldots + \alpha_{1n} f_n, \\ F_2 &= \alpha_{21} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \ldots + \alpha_{2n} f_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n &= \alpha_{n1} f_1 + \alpha_{n2} f_2 + \ldots + \alpha_{nn} f_n, \end{aligned}$$

à un facteur près, égal à une puissance du déterminant

$$\sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}$$

de la substitution, tout en étant un covariant de ces formes. Ainsi, si l'on considère une substitution

$$X_1 = \gamma_{11} x_1 + \ldots + \gamma_{2n} x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

une fonction K sera un combinant, si l'on a à la fois

$$\mathrm{K}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots) = \Gamma^{\omega}\,\mathrm{K}(f_1, f_2, \ldots),$$
$$\mathrm{K}(a, a', \ldots, \mathrm{X}_1, \ldots) = \Delta^{\sigma}\,\mathrm{K}(b, b', \ldots, x_1, \ldots).$$

Le déterminant d'un système de fonctions, le hessien d'une fonction sont des combinants.

XVIII — Sur une propriété générale des formes.

Théorème. — *Toutes les fois qu'une proposition relative à des polynômes homogènes ne comprend pas dans son énoncé uniquement des covariants ou des invariants, on peut toujours en déduire une proposition plus générale dont elle n'est qu'un cas particulier et qui, dans son énoncé, ne renferme que des invariants ou des covariants.*

En effet, supposons que la propriété en question résulte d'une ou de plusieurs équations simultanées (et il ne saurait être question ici d'autres propriétés), ces équations contiendront des variables x et les coefficients a de certaines formes; soit

$$(1) \qquad \mathrm{F}(x_1, \ldots, a, \ldots) = f(x_1, \ldots, a, \ldots)$$

l'une d'elles. Si nous effectuons une substitution linéaire, elle deviendra

$$(2) \qquad \mathrm{F}_1(x'_1, \ldots, a', \ldots) = f_1(x_1, \ldots, a', \ldots),$$

a' et x' désignant les nouveaux coefficients et les nouvelles variables. Si la substitution linéaire effectuée a tous ses coefficients indépendants, une nouvelle substitution ne modifiera pas la relation $\mathrm{F}_1 = f_1$, en ce sens qu'elle aura précisément

la même généralité que cette équation; les deux membres de (2) seront donc des covariants ou des invariants, et les formules (2) constituent la traduction algébrique du théorème général dont les équations (1) sont le cas particulier, car on reviendra de la formule (2) à (1) en faisant des hypothèses particulières sur les coefficients de la transformation et sur les coefficients a'.

Cette méthode de généralisation des théorèmes d'Algèbre a été tout d'abord usitée en Géométrie par le général Poncelet, et c'est ainsi que des propriétés du cercle on a pu déduire une foule de propriétés des coniques en mettant le cercle en perspective. Nous verrons plus loin que mettre une figure en perspective, cela revient à appliquer à son équation une substitution linéaire.

Il est bien clair qu'une proposition qui dans son énoncé ne contient que des covariants ne peut plus être généralisée par une transformation linéaire.

D'après ce qui précède, on voit que le but de la théorie des substitutions linéaires est de généraliser les propriétés des polynômes, et la connaissance des invariants et des covariants fournit leurs propriétés les plus générales et aussi les plus simples.

Il serait donc très important de connaître tous les invariants et les covariants d'un système de formes, car ce serait connaître les propriétés générales de ces formes : nous allons procéder à cette recherche.

XIX. — Démonstration d'un lemme important.

Considérons $n+\varepsilon$ lignes de n éléments chacune, savoir

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} a_1, & a_2, & \ldots & a_n, \\ b_1, & b_2, & \ldots & b_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1, & l_2, & \ldots & l_n. \end{matrix}\right.$$

Avec toutes ces lignes on pourra former $C^{\varepsilon}_{n+\varepsilon}$ déterminants; tous ces déterminants mis à la place de Θ dans les équations dont le type est

$$(2)\qquad \frac{d\Theta}{da_i}a_j + \frac{d\Theta}{db_i}b_j + \dots + \frac{d\Theta}{dl_i}l_j = 0 \quad (i \gtrless j),$$

et qui sont au nombre de $n(n-1)$, satisfont identiquement à ces équations, comme on le constate facilement à l'aide d'une propriété fondamentale des déterminants. Réciproquement, nous allons prouver que les équations (2) ne peuvent avoir pour solution Θ qu'une fonction de ces déterminants.

Nous décomposerons la démonstration de ce théorème en trois parties :

1° *Si ε est négatif, c'est-à-dire si le tableau* (1) *n'a pas n lignes, les équations* (2) *n'ont pas de solution Θ fonction des a, b, ..., l.*

2° *Si $\varepsilon = 0$, elles ont une solution fonction du déterminant des éléments* (1).

3° *Si le théorème est vrai pour $\varepsilon = \varepsilon_1$, il sera encore vrai pour $\varepsilon = \varepsilon_1 + 1$.*

1° Si ε est négatif, le nombre des dérivées de Θ qui entrent dans le groupe suivant :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\Theta}{da_i}a_1 + \dfrac{d\Theta}{db_i}b_1 + \dots = 0, \\ \dfrac{d\Theta}{da_i}a_2 + \dfrac{d\Theta}{db_i}b_2 + \dots = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\Theta}{da_i}a_n + \dfrac{d\Theta}{db_i}b_n + \dots = 0 \end{array}\right.$$

est moindre que n, c'est-à-dire est au plus égal au nombre de ces équations; il faut donc supposer

$$\frac{d\Theta}{da_i} = 0, \quad \frac{d\Theta}{db_i} = 0, \quad \dots,$$

ce qui montre que Θ ne saurait contenir les éléments du tableau (1). (Nous supposons, bien entendu, qu'il n'existe

aucune relation entre les éléments de ce tableau.) Ainsi la première partie de notre théorème est démontrée.

2° Supposons $\varepsilon = 0$, et soit P le déterminant des éléments du tableau (1). Prenons P comme variable à la place de a_i; nous aurons, en désignant par un d les dérivées prises dans le nouveau système de variables,

$$\frac{\partial\Theta}{\partial a_i} = \frac{d\Theta}{dP}\frac{\partial P}{\partial a_i},$$
$$\frac{\partial\Theta}{\partial b_i} = \frac{d\Theta}{dP}\frac{\partial P}{\partial b_i} + \frac{d\Theta}{db_i},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Substituons ces valeurs dans (3), en observant que les équations sont satisfaites pour $\Theta = P$, nous aurons

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d\Theta}{db_i}b_1 + \ldots + \frac{d\Theta}{dl_i}l_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{d\Theta}{db_i}b_n + \ldots + \frac{d\Theta}{dl_i}l_n = 0; \end{array}\right.$$

les autres équations du groupe (2) ont conservé leur forme, à cela près que ∂ y est remplacé par d. Mais le système (4) contient $n-1$ dérivées de Θ; et, comme il se compose de $n-1$ équations, il faut que l'on ait

$$\frac{d\Theta}{db_i} = 0, \quad \frac{d\Theta}{dc_i} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d\Theta}{dl_i} = 0;$$

donc Θ ne contient ni b_i, ni c_i, ..., ni l_i. Pour trouver Θ, on peut supposer $b_i = c_i = \ldots = l_i = 0$ dans les autres équations (2) transformées; le groupe

$$\frac{d\Theta}{da_j}a_1 + \frac{d\Theta}{db_j}b_1 + \ldots + \frac{d\Theta}{dl_j}l_1 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{d\Theta}{da_j}a_n + \frac{d\Theta}{db_j}a_n + \ldots + \frac{d\Theta}{dl_j}l_n = 0$$

contient alors l'équation $\frac{d\Theta}{da_j} = 0$ et prend la même forme

que (4), d'où l'on conclut que Θ ne contient ni a_j ni b_j ni $c_j, \ldots$; en d'autres termes, quand on prend pour variable P et tous les éléments du tableau (1) à l'exception de a_i, Θ ne contient que P et est une fonction arbitraire de P. La seconde partie de notre théorème est donc démontrée.

3° Supposons le théorème démontré pour le cas où le tableau (1) possède $n + \varepsilon_1$ lignes, et supposons qu'il en possède actuellement $n + \varepsilon_1 + 1$. Je dis d'abord que, si l'on prend $n + 1$ lignes dans le tableau (1) et qu'avec ces $n + 1$ lignes on forme les déterminants $P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$ qui ne renferment pas la deuxième, la troisième, ..., la $n^{\text{ième}}$ ligne, on pourra calculer les a en fonction de $P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$; il suffit pour cela de prouver que, si l'on pose, en appelant $l_1, l_2, \ldots, l_n$ la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne du tableau (1),

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_0 & l_1 & \ldots & l_n \end{vmatrix},$$

les équations

$$(5) \qquad \frac{\partial R}{\partial b_0} = P_2, \quad \frac{\partial R}{\partial c_0} = P_3, \quad \ldots, \quad \frac{\partial R}{\partial l_0} = P_{n+1}$$

seront compatibles, ou, si l'on veut, comme elles sont du premier degré en $a_1, a_2, \ldots$, elles n'auront pas leur déterminant nul. Il suffit pour cela de considérer un cas particulier, celui où l'on aurait

$$\begin{array}{lllll} b_1 = 1, & b_2 = 0, & b_3 = 0, & \ldots, & b_n = 0, \\ c_1 = 0, & c_2 = 1, & c_3 = 0, & \ldots, & c_n = 0, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ l_1 = 0, & l_2 = 0, & l_3 = 0, & \ldots, & l_n = 1; \end{array}$$

les équations (5) prennent alors la forme

$$a_1 = P_2, \quad a_2 = P_3, \quad \ldots.$$

Ainsi, s'il n'existe aucune relation entre les éléments du tableau (1), on pourra prendre pour variables à la place de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ces déterminants $P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$.

Désignons par un d les dérivées quand les $P_2, \ldots, P_{n+1}$, les b, les c, ... sont variables indépendantes; on aura

$$\frac{\partial \Theta}{\partial a_i} = \frac{d\Theta}{dP_2}\frac{\partial P_2}{\partial a_i} + \frac{d\Theta}{dP_3}\frac{\partial P_3}{\partial a_i} + \ldots,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial b_i} = \frac{d\Theta}{dP_2}\frac{\partial a_i}{\partial P_2} + \frac{d\Theta}{dP_3}\frac{\partial P_3}{\partial a_i} + \ldots + \frac{d\Theta}{db_i},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

en observant alors que les équations (2) ont pour solutions les P, ces équations deviennent

$$\frac{d\Theta}{db_i}b_j + \frac{d\Theta}{dc_i}c_j + \ldots + \frac{d\Theta}{dl_i}l_j = 0.$$

Ces équations, par hypothèse, ne renferment que les variables d'un tableau à $n + \varepsilon_1$ lignes; elles n'ont donc d'autres solutions que les déterminants que l'on peut former avec les éléments de ce tableau ou leurs fonctions arbitraires, pouvant par suite renfermer $P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$, ce qui revient à dire que Θ est une fonction de tous les déterminants que l'on peut former avec les éléments du tableau de $n + \varepsilon_1 + 1$ lignes. Notre théorème est donc démontré.

XX. — Recherche des covariants et des contrevariants des formes linéaires.

Soient

$$\begin{array}{l} x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n, \\ \ldots,\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{array}$$

des variables cogrédientes, et

$$\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n, \\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n, \\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots,\ \ldots \end{array}$$

des variables contragrédientes, un certain nombre de ces

variables contragrédientes, toutes même (*voir* p. 253), pouvant être les coefficients de formes linéaires, telles que

$$A = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit $\Theta(a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots)$ un contrevariant de ces formes ; si l'on effectue la substitution unimodulaire

$$x_1 = x'_1 + \lambda x'_2, \quad x_2 = x'_2, \quad \ldots, \quad x_n = x'_n,$$

on aura

$$\begin{array}{llll} y_1 = y'_1 - \lambda y'_2, & y_2 = y'_2, & \ldots, & y_n = y'_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ a'_1 = a_1, & a'_2 = a_2 + \lambda a_1, & a'_3 = a_3, & \ldots, \\ b'_1 = b_1, & b'_2 = b_2 + \lambda b_1, & b'_3 = b_3, & \ldots, \\ c'_1 = c_1, & c'_2 = c_2 + \lambda c_1, & c'_3 = c_3, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, \end{array}$$

les lettres accentuées désignant ce que deviennent les lettres non accentuées après la transformation.

On aura ensuite

$$\Theta(a_1, a_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots) = \Theta(a'_1, a'_2, \ldots, x'_1, x'_2, \ldots)$$

ou bien

$$\Theta(a_1, a_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots) = \Theta(a_1, a_2 - \lambda a_1, \ldots, x_1 - \lambda x_2, x_2, \ldots).$$

Égalons les coefficients de λ dans les deux membres, après avoir développé le second membre par la formule de Taylor ; nous aurons

$$0 = a_1 \frac{\partial\Theta}{\partial a_2} + \ldots - x_2 \frac{\partial\Theta}{\partial x_1} - \ldots$$

ou, plus généralement,

$$(1) \qquad a_i \frac{\partial\Theta}{\partial a_j} + b_i \frac{\partial\Theta}{\partial b_j} + \ldots = x_j \frac{\partial\Theta}{\partial x_i} - y_j \frac{\partial\Theta}{\partial y_i} - \ldots.$$

Telles sont les équations auxquelles doivent satisfaire tous les invariants, divariants, covariants et contrevariants des formes linéaires.

Introduisons, s'il le faut, assez de variables contragrédientes pour que le nombre des fonctions linéaires

$$\begin{aligned} A_x &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n, \\ B_x &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

soit supérieur ou au moins égal à n ; on pourra, aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ substituer n des nouvelles variables A_x, B_x, C_x, ..., aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ substituer les variables A_y, B_y, C_y, ..., en désignant ainsi ce que deviennent A_x, B_x, ... quand on y remplace x par y, ... Désignons par un d les dérivées prises par rapport au nouveau système de variables ; nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta}{\partial a_i} &= \frac{d\Theta}{da_i} + \frac{d\Theta}{dA_x}\frac{\partial A_x}{\partial a_i} + \frac{d\Theta}{dB_x}\frac{\partial B_x}{\partial a_i} + \ldots, \\ \frac{\partial\Theta}{\partial x_j} &= \frac{d\Theta}{dA_x}\frac{\partial A_x}{\partial x_j} + \frac{d\Theta}{dB_x}\frac{\partial B_x}{\partial x_j} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans (1) et observons que cette équation est satisfaite en posant $\Theta = A_x, B_x, \ldots, A_y, B_y, \ldots$; il viendra

$$a_i \frac{d\Theta}{da_j} + b_i \frac{d\Theta}{db_j} + \ldots + l_i \frac{d\Theta}{dl_j} = 0.$$

Les équations contenues dans ce type n'admettent pas d'autres solutions, comme on l'a vu au paragraphe précédent, que des fonctions arbitraires des déterminants que l'on peut former avec les variables contragrédientes ; dans l'expression de ces fonctions pourront entrer A_x, B_x, ..., qui ne dépendent pas des a_j, b_j, ... au point de vue où nous sommes placés ; donc :

Tout contrevariant de formes linéaires, dans lequel il entre suffisamment de variables contragrédientes, est une fonction : 1° *de ces formes,* 2° *des déterminants que l'on peut former avec les variables contragrédientes, y compris les coefficients des formes.*

On dit quelquefois aussi que le contrevariant peut contenir

les covariants identiques qui sont les déterminants formés avec les variables cogrédientes, mais ces covariants sont fonctions des formes et des déterminants des variables contragrédientes.

Les invariants et les covariants étant des cas particuliers des contrevariants, on voit que moins de n formes à n variables et du premier degré n'ont pas d'invariant. Plus de n formes linéaires à n variables ont pour invariants les déterminants que l'on peut former avec leurs coefficients, et en général leurs fonctions. Les covariants en contiennent outre les formes elles-mêmes.

XXI. — Recherche des covariants et des contrevariants des formes quelconques.

Théorème I. — *Tout contrevariant d'une ou de plusieurs formes peut être considéré comme un contrevariant de plusieurs formes dans lequel les coefficients des nouvelles formes n'entrent qu'au premier degré, contrevariant dans lequel on suppose certaines formes égales après coup.*

Soit, en effet, $\varphi(a, a', a'', \ldots)$ un contrevariant d'une forme ayant pour coefficients $a, a', a'', \ldots$; soient $b, b', b'', \ldots$ les coefficients d'une autre forme de même degré m. La quantité

$$(1) \qquad b\frac{\partial\varphi}{\partial a} + b'\frac{\partial\varphi}{\partial a'} + b''\frac{\partial\varphi}{\partial a''} + \ldots$$

sera un contrevariant des deux formes, car

$$\varphi(a + \lambda b, a' + \lambda b', \ldots)$$

est un contrevariant des deux formes, quel que soit λ; le coefficient de λ, qui n'est autre chose que l'expression (1), est donc aussi un contrevariant des deux formes; or le nouveau contrevariant (1) ne contient plus les a qu'à un degré inférieur à m d'une unité, appelons-le φ_{m-1}. Soient encore c, $c', c'', \ldots$ les coefficients d'une nouvelle forme d'ordre m.

La quantité

$$c\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial a}+c'\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial a'}+c''\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial a''}+\ldots$$

sera un contrevariant ne contenant plus a, a', a'', ... qu'au degré $m-2$, appelons-le φ_{m-2}, et ainsi de suite; φ_1 ne contiendra plus les a, les b, les c, ... qu'au premier degré et l'on aura, en faisant $a=b=c=\ldots$, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$\varphi_{m-1}=m\varphi,\quad \varphi_{m-2}=(m-1)\varphi_{m-1},\quad \ldots,\quad \varphi_1=2\varphi_2,$$

et par suite

$$\varphi_1=m(m-1)\ldots2.1\varphi;$$

φ_1 est donc égal, à un facteur numérique près, au contrevariant donné, quand on y suppose $a=b=c=\ldots$, et il contient les a, les b, les c, ... au premier degré seulement.

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Quand un contrevariant de plusieurs formes ne contient les coefficients de ces formes qu'au premier degré, on peut le considérer comme un contrevariant de plusieurs formes linéaires.*

Soit $a_{ijk\ldots}$ un coefficient de l'une des formes

$$\sum\frac{m!}{i!\,j!\,k!\ldots}\,a_{ijk\ldots}x_1^i x_2^j x_3^k\ldots$$

de telle sorte que, si l'on fait

$$a_{ijk\ldots}=a_1^i a_2^j a_3^k\ldots,$$

la forme se réduise à $(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^m$; soit $\varphi(a_{ijk\ldots},\ldots)$ un contrevariant; soit Γ le déterminant d'une substitution qui changera $a_{ijk\ldots}$ en $b_{ijk\ldots}$; on aura

$$\varphi(a_{ijk\ldots},\ \ldots)=\Gamma^{\omega}\varphi(b_{ijk\ldots},\ \ldots).$$

Si, en particulier, on considère la forme

$$(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^m,$$

laquelle devient après la transformation

$$(b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_ny_n)^m,$$

il est clair que l'on aura

$$\varphi(a_1^i a_2^j a_3^k \ldots, \ldots) = \Gamma^{\omega} \varphi(b_1^i b_2^j b_3^k \ldots, \ldots);$$

le contrevariant considéré peut donc être considéré comme dérivant d'une forme linéaire, dans lequel on remplacerait les produits tels que $a_1^i a_2^j a_3^k \ldots$ par $a_{i,j,k,\ldots}$. Réciproquement, si l'on connaît un contrevariant $\varphi(a_1^i a_2^j \ldots)$ de plusieurs formes linéaires, on peut en déduire un contrevariant d'une forme de degré égal au degré de ce contrevariant en remplaçant $a_1^i a_2^j \ldots$ par $a_{ijk\ldots}$. En effet, la substitution qui change $a_{ijk\ldots}$ en $b_{ijk\ldots}$ change a_i en b_i, a_j en b_j, ...

Cette même substitution, changeant

$$\varphi(a_1^i a_2^j \ldots) \quad \text{en} \quad \Gamma^{\omega} \varphi(b_1^i b_2^j \ldots),$$

changera

$$\varphi(a_{ijk} \ldots) \quad \text{en} \quad \Gamma^{\omega} \varphi(b_{ijk} \ldots).$$

Des deux théorèmes précédents il résulte qu'il suffit de considérer les contrevariants des formes linéaires pour en déduire tous les contrevariants des autres formes.

XXII. — Méthode de M. Cayley.

C'est M. Aronhold qui a ramené la recherche des contrevariants à ceux des formes linéaires, mais M. Cayley (*Cambridge and Dublin mathematical Journal,* t. I; *Journal de Crelle,* t. 30) avait antérieurement fait connaître une méthode qui donnait tous les contrevariants; il est facile de déduire cette méthode de ce qui précède. Soient

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

des formes linéaires, et

$$(1) \qquad \varphi(a_1^i a_2^j \ldots b_1^k b_2^l \ldots)$$

un contrevariant de ces formes; si l'on y suppose

$$a_1^i a_2^j \ldots = a_{ij\ldots}, \quad b_1^k b_2^l \ldots = b_{kl\ldots},$$

on obtiendra un contrevariant de formes de degré plus élevé et l'on pourra même après coup supposer $a = b = \ldots$

Avant de faire cette hypothèse $a = b = \ldots$, désignons par f la forme qui a pour coefficients $a_{ij\ldots}$, par g celle qui a pour coefficients $b_{kl\ldots}$, etc.; on a évidemment, à un facteur numérique près,

$$a_{ij\ldots} = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^i \, \partial x_2^j \ldots},$$

en sorte que le contrevariant (1) pourra s'écrire

$$\varphi\left(\frac{\partial^i f}{\partial x_1^i}, \frac{\partial^j f}{\partial x_2^j}, \ldots, \frac{\partial^k g}{\partial x_1^k}, \frac{\partial^l g}{\partial x_2^k}, \ldots\right),$$

à la condition de remplacer les produits, tels que $\dfrac{\partial^i f}{\partial x_1^i} \dfrac{\partial^j f}{\partial x_2^j} \cdots$ par $\dfrac{\partial^{i+j+\ldots} f}{\partial x_1^i \, \partial x_2^j \ldots}$.

Ainsi, *pour former les contrevariants, on peut dans les contrevariants des formes linéaires remplacer les coefficients de ces formes par les symboles* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots,$ *à la condition de remplacer les puissances de ces symboles et leurs produits par des dérivées d'ordre supérieur.*

Or les contrevariants des formes linéaires sont des fonctions des formes et des déterminants de ces formes; en considérant les variables contragrédientes comme des coefficients de formes linéaires, les contrevariants des formes $f, g, \ldots$ pourront donc être représentés comme des fonctions de déterminants, tels que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont des variables contragrédientes. Les fonctions ainsi obtenues ne contiendront les coefficients de f,

$g, \ldots$ qu'au premier degré; mais, en prenant $f = g = \ldots$, on aura des contrevariants plus généraux après coup.

Si l'on s'attache plus spécialement à la formation des invariants, on devra former exclusivement des fonctions des déterminants, tels que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

et les prendre à un degré, par rapport aux dérivées, égal au degré des formes, afin que les variables disparaissent.

XXIII. — Application des théories précédentes aux formes binaires. Invariants.

Tout polynôme entier en x, $f(x)$, peut être considéré comme un polynôme entier à deux variables en x et y, homogène, dans lequel $y = 1$. En effet, soit n le degré de f; il est clair que $y^n f\left(\frac{x}{y}\right)$ est le polynôme homogène en question. La théorie des formes binaires n'est donc au fond qu'un complément de la théorie des polynômes entiers à une variable.

Théorème. — *Tout invariant d'une forme binaire est une fonction symétrique des racines de l'équation obtenue en égalant cette forme à zéro; cette fonction ne doit contenir que les différences des racines en question; enfin dans chaque terme les racines doivent toutes entrer un même nombre de fois.*

D'abord il est clair qu'un invariant, devant être une fonction entière des coefficients de la forme, sera fonction symétrique des racines; de plus, si l'on augmente chaque racine de λ, ce qui revient à faire une substitution linéaire de module 1, un invariant ne doit pas changer. Or les différences des racines ne changent pas : et d'ailleurs, pour que ces diffé-

rences ne changent pas, il faut et il suffit que les racines augmentent d'une même quantité. L'invariant restant constant en même temps que les différences des racines est donc une fonction de ces différences.

Faisons maintenant la substitution

$$x = \lambda x + \mu y, \quad y = \lambda' x + \mu' y,$$

ce qui revient à faire dans $f(x) = 0$

$$x = \frac{\lambda x' + \mu y'}{\lambda' x' + \mu' y'} = \frac{\lambda x' + \mu'}{\lambda' x' + \mu'};$$

l'invariant est multiplié par $(\lambda\mu' - \mu\lambda')^{\omega}$. Une racine x_1 devient $\frac{\lambda x'_1 + \mu'}{\lambda' x'_1 + \mu'}$, la différence $x_1 - x_2$ devient

$$\frac{\lambda x'_1 + \mu}{\lambda' x'_1 + \mu'} - \frac{\lambda x'_2 + \mu}{\lambda' x'_2 + \mu'} = \frac{(\lambda\mu' - \lambda'\mu)(x'_1 - x'_2)}{(\lambda' x_1 + \mu')(\lambda' x'_2 + \mu')};$$

pour qu'une somme de produits des différences des racines ne soit multipliée que par un facteur, il est nécessaire qu'une racine entre un même nombre de fois dans chaque terme.

Il résulte de là que l'invariant le plus simple d'une forme binaire est son *discriminant*, c'est-à-dire le produit des carrés des différences de toutes ses racines.

Si l'on considère la forme $f(x, y)$, le discriminant de cette forme est le premier membre de la résultante des deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = 0.$$

En égalant le discriminant à zéro, on exprime que $f = 0$ a une racine double ou que $f(x, y)$ a deux facteurs linéaires égaux. Or, en égalant à zéro le produit des carrés des différences des racines ou le dernier terme de l'équation aux carrés

des différences, on obtient la même condition ; le discriminant est donc le dernier terme de l'équation aux carrés des différences : c'est évidemment le plus simple invariant.

Théorème II. — *Tout covariant d'une forme binaire est une somme de produits de différences des racines et de x $\left(ou \frac{x}{y}\right)$ dans lesquels toutes les racines entrent un même nombre de fois* (démonstration analogue).

Voici maintenant un moyen de former des invariants, qui s'appliquerait aux fonctions de plus de deux variables, mais qui conduirait pour ces fonctions à des calculs très compliqués.

Soit n le degré d'une forme binaire $f(x, y)$ et soit μ le degré d'un invariant que l'on se propose de calculer. Un invariant, étant une somme de produits des différences des racines, homogène par rapport à ces racines, aura tous ses termes de même poids.

Faisons la substitution $x = y'$, $y = x'$; cette substitution, de module -1, a pour effet de changer le coefficient a_i de la forme en a_{n-i}; en appelant alors $\alpha, \beta, \ldots$ les indices d'un terme de l'invariant, on doit avoir

$$\alpha + \beta + \ldots = n - \alpha + n - \beta + \ldots$$

ou, en appelant p le poids de l'invariant, à savoir $\alpha + \beta + \ldots$,

$$p = \mu n - p \quad \text{ou} \quad p = \tfrac{1}{2}\mu n.$$

Le produit μn doit donc être pair; donc :

Une forme de degré impair n'a pas d'invariant de degré impair.

Le poids de l'invariant étant connu, sa partie littérale est déterminée; il ne reste plus qu'à calculer ses coefficients, ce qui se fera au moyen d'équations que nous allons faire connaître.

Soit V l'invariant cherché, il ne doit pas changer quand on remplace x par $x + y\,\delta x$; donc, en appelant $\delta a_0, \delta a_1, \delta a_2, \ldots$

les variations que subissent alors les coefficients a_0, a_1, ..., de la forme, on doit avoir $\delta V = 0$ ou

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_0}\delta a_0 + \frac{\partial V}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial V}{\partial a_2}\delta a_2 + \ldots = 0;$$

d'un autre côté, la forme elle-même est devenue

$$a_0(x + y\delta x)^n + \frac{n}{1}a_1(x + y\delta x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2(x + y\delta x)^{n-2} + \ldots$$

ou

$$a_0 x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}(a_0 y\delta x + a_1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(a_0 y^2 \delta x^2 + 2a_1 y\delta x + a_2) + \ldots;$$

donc

$$\delta a_0 = 0, \quad \delta a_1 = a_0 y\delta x, \quad \delta a_2 = 2a_1 y\delta x, \quad \ldots,$$

et par suite on a, en remplaçant dans (1) δa_0, δa_1, ... par ces valeurs,

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_1}a_0 + 2\frac{\partial V}{\partial a_2}a_1 + 3\frac{\partial V}{\partial a_3}a_2 + \ldots = 0.$$

On trouve de même

$$(3) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_{n-1}}a_n + 2\frac{\partial V}{\partial a_{n-2}}a_{n-1} + \ldots = 0.$$

Pour montrer l'usage que l'on peut faire de ces formules, cherchons l'invariant biquadratique d'une forme cubique.

Ici $n = 3$, $\mu = 4$, $p = 6$; l'invariant cherché V est de la forme

$$V = A a_3^2 a_0^2 + B a_2^3 a_0 + C a_3 a_1^3 + D a_2^2 a_1^2 + E a_0 a_1 a_2 a_3.$$

L'application de la formule (2) donne

$$3C + 2E = 0, \quad 2D + 6B + 3E = 0, \quad E + 6A = 0, \quad 4D + 3C = 0;$$

d'où l'on tire, en posant $E = -6$,

$$A = 1, \quad B = 4, \quad C = 4, \quad D = -3;$$

l'invariant cherché est donc

$$a_3^2 a_0^2 + 4a_3^2 a_0 + 4a_3 a_1^3 - 3a_2^2 a_1^2 - 6a_0 a_2 a_1 a_3:$$

c'est, comme on peut s'en assurer, le discriminant de la forme.

Cette méthode est applicable aux covariants et aux invariants de toutes les formes et même de plusieurs formes simultanées, mais elle se complique. On a songé à l'employer pour la détermination de la résultante de plusieurs équations; on peut en voir des exemples dans la *Théorie générale de l'élimination* (1) du chevalier Faà de Bruno.

EXERCICES ET NOTES.

1. Les invariants des formes binaires jouent un rôle important dans la théorie des équations; les invariants d'une forme $f(x, y)$ sont, comme on l'a vu, les fonctions des différences des racines de l'équation $f(x) = 0$. Parmi ces fonctions, il faut distinguer le dernier terme de l'équation aux carrés des différences, qui peut se mettre sous la forme

$$f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \ldots f'(\alpha_n),$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont les racines de $f(x) = 0$, et encore sous la forme

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

$s_0, s_1, \ldots$ désignant les sommes $\sum \alpha^0, \sum \alpha, \sum \alpha^2, \ldots$ Ce résultat s'obtient en faisant le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

qui est le produit des différences des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Ce produit des carrés des différences des racines est le discriminant de $f(x, y)$; en l'égalant à zéro, on a la condition pour que $f(x) = 0$ ait une racine double.

(1) Grand in-8; 1859. Paris, Gauthier-Villars.

2. Une forme binaire de degré n a autant de covariants du degré p, par rapport à ses coefficients, qu'une forme binaire du degré p a de covariants du degré n par rapport à ses coefficients (loi de réciprocité de M. Hermite).

3. $$a_0a_{2m} - \frac{2m}{1}a_1a_{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1.2}a_2a_{2m-2} - \dots \pm \frac{1}{2}\,\frac{2m(2m-1)\dots(m+1)}{1.2.3\dots m}\,a_ma_m$$

est un invariant de

$$a_0x^{2m} + \frac{2m}{1}a_1x^{2m-1}y + \dots + a_{2m}y^{2m}.$$

4. $$a_0b_n - b_0a_n - \frac{n}{1}(a_1b_{n-1} - b_1a_{n-1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(a_2b_{n-2} - b_2a_{n-2}) - \dots$$

est un invariant des formes

$$a_0x^n + \frac{n}{1}a_1x^{n-1}y + \dots,\quad b_0x^n + \frac{n}{1}b_1x^{n-1}y + \dots$$

quand n est impair.

5. $$(a_1a_0 - a_1^2)x^2 + (a_0a_3 - a_2a_1)xy + (a_1a_3 - a_2^2)y^2$$

est un covariant de

$$a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3.$$

N.-B. — Voir le *Traité d'Algèbre supérieure* de M. SALMON (1), et les *Leçons sur la Géométrie par* M. CLEBSCH, *recueillies et complétées par* LINDEMANN *et traduites par* ADOLPHE BENOIST (2).

6. Soient $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ des fonctions homogènes et de même degré des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}$ les déterminants fonctionnels que l'on peut former avec n de ces fonctions.

Démontrer que $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ sont proportionnels aux déterminants fonctionnels que l'on peut former avec n des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}$ et prouver que l'on a

$$\sum_{p=1}^{p=n+1}\left(\frac{\partial\varphi_p}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial f_p}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_\nu}\,\frac{\partial f_p}{\partial x_\mu}\right) = 0.$$

(1) In-8; 1885, Paris, Gauthier-Villars.

(2) Trois volumes grand in-8; 1879-1880-1883. Paris, Gauthier-Villars.

On s'appuie sur les relations

$$\varphi_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu} + \varphi_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} + \ldots + \varphi_{n+1} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_\mu} = 0,$$

$$\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \ldots + \varphi_{n+1} f_{n+1} = 0.$$

(Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 70).

CHAPITRE XI.

SUR L'ÉLIMINATION.

I. — Définitions.

Éliminer $x, y, z, \ldots$ entre un certain nombre d'équations, c'est, dans l'acception la plus large du mot, trouver une ou plusieurs équations qui soient des conséquences nécessaires des équations proposées et qui ne contiennent plus $x, y, z, \ldots$

Cette définition peut être transformée : considérons les équations

$$(1) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n+1} = 0,$$

dans lesquelles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ désignent des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons que l'on ait pu former une conséquence nécessaire $R = 0$ de ces équations, ne contenant plus $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $R = 0$ étant conséquence nécessaire des équations (1) ne pourra avoir lieu que si ces équations sont satisfaites en même temps, c'est-à-dire que si elles ont au moins une solution commune, et elle aura lieu dès que ces équations auront une solution commune.

Ainsi *éliminer* $x_1, x_2, \ldots$ entre des équations données, c'est trouver la condition nécessaire et suffisante pour que ces équations aient au moins une solution commune.

La condition nécessaire et suffisante, $R = 0$, pour que les équations (1) aient une solution commune, est ce que l'on appelle la *résultante* des équations (1).

On ne possède aucune règle générale pour trouver la résultante de deux ou plusieurs équations transcendantes. Il est souvent fort difficile de déterminer la résultante de plusieurs équations algébriques qui n'affectent pas la forme entière.

Lorsque l'on veut éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre des équations telles que (1), où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ désignent des polynômes entiers, on se propose généralement de déterminer la résultante $R = 0$, de telle sorte que R soit un polynôme entier par rapport aux coefficients de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ et de degré minimum par rapport à ces coefficients. R est alors déterminé, comme nous le verrons, à un facteur numérique près. Nous déterminerons même ce facteur numérique, et alors le polynôme R sera ce que nous appellerons le *résultant* ou l'*éliminant* des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

II. — Coefficients, arguments, poids, etc.

Si nous considérons un polynôme quelconque entier en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ses termes se composeront en général de deux groupes de facteurs; les uns contiendront les variables $x_1, x_2, \ldots$, les autres en seront indépendants. Le groupe de facteurs indépendants de $x_1, x_2, \ldots$ dans un terme sera le *coefficient* du terme, l'autre groupe en sera l'*argument*. Ainsi, dans le terme $2axy$, l'argument est xy et $2a$ est le coefficient.

Étant donné un polynôme entier, nous le *rendrons* souvent *homogène;* pour cela, nous introduirons dans chaque terme un facteur fictif qui sera une puissance de t, que nous supposerons égal à 1; cette puissance de t sera choisie de telle sorte que le degré du terme qui lui est relatif devienne égal au degré du polynôme dont il fait partie. La variable t sera toujours supposée faire partie du coefficient et non de l'argument du terme auquel elle a été adjointe.

Cela posé, nous appellerons *poids* d'un terme le degré de ce terme par rapport à la variable t; par exemple, dans le polynôme

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_i x^{m-i} + \ldots,$$

qui, rendu homogène, devient

$$a_0 x^m + a_1 t x^{m-1} + \ldots + a_i t^i x^{m-i} + \ldots,$$

$a_i t^i$ est de poids i, a_i est de poids i.

Le poids d'une fonction quelconque des coefficients de plusieurs polynômes sera le degré de cette fonction par rapport à la variable fictive t. Ainsi, par exemple, si l'on considère les polynômes de degrés m et n

$$\sum a_{ijk} x^i y^j z^k \quad \text{et} \quad \sum b_{ijk} x^i y^j z^k,$$

la fonction

$$a_{ijk} b_{pqr}^2$$

sera de poids

$$m-(i+j+k)+2n-2(p+q+r),$$

et ainsi de suite.

Théorème. — *Les solutions (quand elles en ont) des équations entières en $x_1, x_2, \ldots, x_n$*

(1) $$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0$$

sont des fonctions de poids égal à 1.

En effet, supposons que $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $\ldots$ $x_n = a_n$ soit une solution des équations (1); changeons la variable fictive t qui donne le poids en kt; un coefficient P des équations (1) de poids p deviendra $\mathrm{P}k^p$, mais, dans ces circonstances, les équations seront satisfaites en posant

$$x_1 = ka_1, \quad x_2 = ka_2, \quad \ldots;$$

les solutions sont donc des fonctions homogènes de t du degré 1 : leur poids est donc 1.

Il résulte de là que, si une fonction des solutions peut s'exprimer rationnellement au moyen des coefficients des polynômes φ, son poids sera égal à son degré pris par rapport aux solutions qui entrent dans son expression.

Cette remarque est de la plus haute importance dans ce

qui va suivre, et nous dispensera de faire un certain nombre de démonstrations directes qui présentent généralement des difficultés.

III. — Fonctions symétriques des racines d'une équation.

On appelle *fonction symétrique* de quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ une fonction qui ne change pas de valeur quand on permute ces lettres d'une façon quelconque.

Pour former les fonctions symétriques des racines d'une équation, on forme d'abord les sommes des puissances semblables des racines, et voici comment :

Soit

$$(1) \qquad \varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

une équation du degré m, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ses racines ; on aura

$$\varphi(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m),$$

ou, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres,

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x-\alpha_m}.$$

Développons $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, et soit $\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \ldots$ ce développement : développons également le second membre de la même façon, en observant que

$$\frac{1}{x-\alpha_i} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha_i}{x^2} + \frac{\alpha_i^2}{x^3} + \ldots;$$

nous aurons

$$\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \ldots = \frac{m}{x} + \frac{\Sigma\alpha}{x^2} + \frac{\Sigma\alpha^2}{x^3} + \ldots,$$

et, en égalant de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances de $\frac{1}{x}$,

$$s_0 = m = \sum \alpha^0, \quad s_1 = \sum \alpha, \quad s_2 = \sum \alpha^2, \quad \ldots$$

Donc : *la somme des puissances $i^{\text{èmes}}$ des racines d'une équation $\varphi(x)=0$ est le coefficient de $\frac{1}{x^{i+1}}$ dans le développement de $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ ordonné suivant les puissances de $\frac{1}{x}$.*

On verrait de même que *la somme des puissances $-i^{\text{èmes}}$ des racines est le coefficient de x^{i-1} dans le développement de $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ ordonné suivant les puissances croissantes de x* (quand il n'y a pas de racine nulle).

Plus généralement, soient $f(x)$ une fonction entière quelconque et $E(x)$ un polynôme entier en x convenablement choisi; on a

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = E(x) + \sum \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)(x-\alpha)};$$

le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le second membre développé suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ est $\sum \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$; donc

1° *La somme $\sum \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ordonné suivant les puissances de $\frac{1}{x}$.*

2° Si le polynôme $f(x)$ est de degré $m-2$ au plus, le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ sera nul; donc, *$f(x)$ désignant un polynôme de degré $m-2$ au plus et $\varphi(x)$ un polynôme de degré m, α une quelconque des racines de $\varphi(x)=0$, on a*

$$\sum \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} = 0,$$

et, en particulier,

$$\sum \frac{1}{\varphi'(\alpha)} = 0, \quad \sum \frac{\alpha}{\varphi'(\alpha)} = 0, \quad \ldots, \quad \sum \frac{\alpha^{n-2}}{\varphi'(\alpha)} = 0$$

et

$$\sum \frac{\alpha^{n-1}}{\varphi'(\alpha)} = a_0^{-1},$$

a_0 désignant le coefficient de x^m dans $\varphi(x)$.

Ce dernier théorème est d'Euler.

3° *Si l'on suppose* $f(x) = \varphi'(x)\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}(x)$ *désignant un polynôme quelconque, on voit que* $\sum \mathrm{F}(\alpha)$ *sera le coefficient de* $\frac{1}{x}$ *dans le développement de* $\frac{\varphi'(x)\mathrm{F}(x)}{\varphi(x)}$ *suivant les puissances de* $\frac{1}{x}$.

Ce dernier théorème aura encore lieu quand $\varphi(x) = 0$ aura des racines multiples, pourvu que, si α est une racine d'ordre de multiplicité i, on fasse figurer i fois le terme $\mathrm{F}(\alpha)$ dans $\sum \mathrm{F}(\alpha)$; et cela, en vertu de la continuité des racines par rapport aux coefficients.

Les sommes s_0, s_1, ... pourront se calculer ainsi, soit par une simple division, soit par la méthode des coefficients indéterminés; s_0, s_1, ... sont respectivement de poids 0, 1, 2, ... et entiers par rapport aux coefficients a_1, a_2, ... mais non par rapport à a_0.

En général, on a, en appelant toujours α_1, α_2, ... les racines de $\varphi(x) = 0$,

$$\begin{aligned}
&\sum \alpha_1^i \alpha_2^j \ldots \alpha_{n-1}^k \alpha_n^l \\
&\quad = \sum \alpha_1^i \sum \alpha_2^j \ldots \alpha_{n-1}^k \alpha_n^l - \sum \alpha_2^{i+j} \ldots \alpha_{n-1}^k \alpha_n \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad - \sum \alpha_2^j \ldots \alpha_{n-1}^{k+i} \alpha_n^l \\
&\qquad - \sum \alpha_2^j \ldots \alpha_{n-1}^k \alpha_n^{l+i}.
\end{aligned}$$

Il résulte de là que, quand on aura formé les fonctions $\sum \alpha_1^i$ ou s_0, s_1, s_2, ..., on pourra former les fonctions symétriques de la forme $\sum \alpha_1^i \alpha_2^j$; quand on aura formé celles-ci, on saura former celles de la forme $\sum \alpha_1^i \alpha_2^j \alpha_3^k$ ..., et ainsi de suite; on saura donc former les fonctions symétriques entières quelconques des racines d'une équation algébrique. D'après la manière dont nous avons procédé, on voit que :

Toute fonction symétrique rationnelle des racines d'une

équation algébrique s'exprime rationnellement au moyen des coefficients de l'équation ;

et même :

Toute fonction symétrique entière des racines d'une équation est une fonction entière des coefficients divisés par le coefficient de la plus haute puissance de x dans l'équation.

Si l'on divise $\varphi'(x)$ par $\varphi(x)$ en ordonnant le quotient suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{x}$, le coefficient du premier terme est m, celui du second est $-\frac{a_1}{a_0}$, celui du troisième est $\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0}$, etc., et l'on voit facilement que ces coefficients ont des degrés croissants d'une unité par rapport à $a_1, a_2, \ldots$; donc, en général, s_i est de degré i, entier par rapport aux coefficients $a_1, a_2, \ldots$, mais son dénominateur est a_0^i. D'après la manière dont on forme une fonction symétrique, on voit que :

Toute fonction symétrique entière des racines d'une équation de degré δ par rapport à ces racines sera une fonction rationnelle des coefficients dont le numérateur sera de degré δ au plus par rapport aux coefficients et de poids δ, et dont le dénominateur sera la puissance δ du coefficient du terme de degré le plus élevé dans l'équation.

Le nombre δ est un maximum, pour le degré du numérateur bien entendu ; en effet, par exemple, le produit des racines de $\varphi = 0$ est $\frac{a_m}{a_0}$; le numérateur est du premier degré, bien que le produit des racines soit de degré m.

IV. — Résultante de deux équations.

Nous allons montrer comment on peut trouver la résultante de deux équations algébriques de la forme

(1) $$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0.$$

φ et ψ désignant deux polynômes entiers en x que nous supposerons des degrés m et p. Nous supposerons aussi que φ et ψ contiennent un paramètre z, de sorte que φ et ψ seront, si l'on veut, des polynômes entiers en x et z de degrés m et p. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ les racines de $\varphi(x) = 0$; la résultante pourra se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_m) = 0.$$

Cette équation exprime, en effet, qu'une au moins des racines de $\varphi = 0$ appartient à $\psi = 0$. La résultante peut évidemment aussi se présenter sous la forme

$$(3) \qquad \varphi(\beta_1)\varphi(\beta_2)\ldots\varphi(\beta_p) = 0,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ désignant les racines de $\psi = 0$, ou même sous la forme

$$(\alpha_1 - \beta_1)\ldots(\alpha_m - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)\ldots(\alpha_m - \beta_2)\ldots = 0$$

ou

$$\Pi(\alpha_i - \beta_j) = 0;$$

et l'on voit que le premier membre de cette dernière équation est, à un facteur indépendant de z près, égal aux premiers membres de (2) et (3). D'ailleurs le premier membre de (2) est symétrique en $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, et par suite rationnel par rapport aux coefficients de φ et ψ.

Le degré de $\psi(\alpha_1)$ par rapport à z est p, car tous les termes sont du même degré p par rapport aux variables x et z; α_i étant de degré 1, d'après ce que l'on a vu § II, il en résulte que le premier membre de (1) est au plus du degré mp par rapport à z. Ainsi :

Théorème. — *Le degré de la résultante de deux équations de degrés m et p est égal, au plus, au produit mp des degrés de ces équations.*

L'expérience montre que la résultante peut atteindre le degré mp, et que, par conséquent, elle l'atteint effectivement dans le cas le plus général.

V. — Transformation de la résultante.

Supposons $a_0 = 1$ et considérons le polynôme du second degré en $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$

$$(1) \qquad Q = \sum \frac{1}{\varphi'(\alpha)\psi(\alpha)}(\xi_0 + \alpha\xi_1 + \alpha^2\xi_2 + \ldots + \alpha^{m-1}\xi_{m-1})^2,$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les racines α de $\varphi(x) = 0$.

Le discriminant de ce polynôme Q relativement aux variables ξ est égal au discriminant relatif aux variables

$$(2) \qquad \begin{cases} u_1 = \xi_0 + \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_1^{m-1}\xi_{m-1}, \\ u_2 = \xi_0 + \alpha_2\xi_1 + \ldots + \alpha_2^{m-1}\xi_{m-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

qui est $\prod \frac{1}{\varphi'(\alpha)\psi(\alpha)}$ multiplié par le carré du déterminant de la substitution (2)

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \ldots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix};$$

mais ce déterminant est égal au produit des différences que l'on peut former avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Pour évaluer ce produit, on observera que

$$(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_m) = \frac{\varphi(x)}{x - \alpha}$$

et, en faisant $x = \alpha_1$,

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\ldots(\alpha_1 - \alpha_m) = \varphi'(\alpha_1);$$

le déterminant en question a donc pour carré $\Pi\,\varphi'(\alpha)$, et le discriminant de la fonction Q est $\frac{1}{\Pi\,\psi(\alpha)}$, c'est-à-dire l'inverse du premier membre de la résultante des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Posons maintenant

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial \xi_0} = x_0 = \sum \dfrac{u}{\varphi'(\alpha)\psi(\alpha)}, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial \xi_1} = x_1 = \sum \dfrac{\alpha u}{\varphi'(\alpha)\psi(\alpha)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial \xi_i} = x_i = \sum \dfrac{\alpha^i u}{\varphi'(\alpha)\psi(\alpha)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et prenons pour nouvelles variables $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots$. La résolution de ces équations par rapport aux u se fera comme il suit :

Appelons $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$ les coefficients de l'équation $\dfrac{\varphi(x)}{x-\alpha_i} = 0$ qui admet toutes les racines de $\varphi(x) = 0$ excepté α_i, multiplions les équations (3) respectivement par $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ et ajoutons-les ; nous aurons

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{m-1} x_{m-1} = u_i \frac{\lambda_0 + \lambda_1 \alpha_i + \dots + \lambda_{m-1}\alpha_i^{m-1}}{\varphi'(\alpha_i)\psi(\alpha_i)};$$

mais $\lambda_0 + \lambda_1 \alpha_i + \dots + \lambda_{m-1}\alpha_i^{m-1}$ est ce que devient $\dfrac{\varphi(x)}{x-\alpha_i}$ pour $x = \alpha_i$, c'est-à-dire $\varphi'(\alpha_i)$; quant au premier membre de l'équation précédente, on peut l'écrire $\dfrac{\varphi(x)}{x-\alpha_i}$, en convenant de remplacer les exposants de x par des indices dans le développement de ce polynôme. On a alors

$$(4)\qquad \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_i}\psi(\alpha_i) = u_i,$$

et l'équation devient

$$Q = \sum \frac{\psi(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)} \left[\frac{\varphi(x)}{x-\alpha_i}\right]^2$$

ou encore

$$Q = \sum \frac{\psi(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)} \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_i} \frac{\varphi(x')}{x'-\alpha_i}.$$

En convenant de faire $x'_i = x_i$, cette formule peut s'écrire

$$(5)\qquad Q = \sum \frac{\psi(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)} \frac{\varphi(x)\varphi(x')}{x'-x}\left(\frac{1}{x-\alpha_i} - \frac{1}{x'-\alpha_i}\right);$$

mais on a (p. 291), en supposant $p < m$,

$$\sum \frac{\psi(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)} \frac{\varphi(x)}{x - \alpha_i} = \psi(x) + \text{const.},$$

$$\sum \frac{\psi(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)} \frac{\varphi(x')}{x' - \alpha_i} = \psi(x') + \text{const.};$$

la formule (5) devient alors

$$Q = \frac{\psi(x)\varphi(x') - \psi(x')\varphi(x)}{x' - x}.$$

La fonction Q peut donc s'obtenir en faisant $x^i = x'^i = x_i$ dans le développement de

$$\frac{\psi(x)\varphi(x') - \psi(x')\varphi(x)}{x' - x}.$$

Appelons I le discriminant de Q par rapport aux x, J son discriminant par rapport aux u, δ le déterminant de la substitution (3); on aura

$$J = I\delta^2 \quad \text{ou} \quad I = \frac{J}{\delta^2};$$

mais J est égal à $\frac{1}{\Pi\, \varphi'(\alpha)\psi(\alpha)}$; quant à $\frac{1}{\delta^2}$, il est égal à

$$\Pi\, \psi^2(\alpha)\, \varphi'(\alpha);$$

on a donc

$$I = \Pi\, \psi(\alpha).$$

De là cette conclusion :

La résultante des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *est le discriminant du polynôme du second degré obtenu en remplaçant* x^i *et* x'^i *par* x_i *dans le développement de l'expression*

$$\frac{\psi(x)\varphi(x') - \varphi(x)\psi(x')}{x' - x}.$$

L'analyse extrêmement remarquable qui précède est due à M. Hermite. Auparavant Bézout, Cauchy et M. Cayley avaient indiqué des moyens équivalents pour trouver la résultante, mais il paraissait difficile de montrer directement l'identité de leurs résultantes avec l'équation $\Pi\, \psi(\alpha) = 0$.

Nous nous bornerons ici à exposer la méthode de M. Cayley, les autres étant exposées dans les Traités élémentaires d'Algèbre.

VI. — Méthode de M. Cayley. — Recherche de la racine commune.

Conservons les notations des paragraphes précédents.

Théorème. — *Si $\varphi(x) = 0$ et $\psi(x) = 0$ ont une racine commune x', il existera des polynômes des degrés $p-1$ et $m-1$, à savoir λ et μ, tels que l'on ait identiquement*

$$(1) \qquad \lambda\varphi + \mu\psi = 0;$$

réciproquement, si l'identité précédente a lieu, les polynômes λ et μ étant de degrés $p-1$ et $m-1$, $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ auront une racine commune.

En effet,

$$(2) \qquad \frac{\psi(x)\varphi(x') - \varphi(x)\psi(x')}{x' - x} = 0$$

est une identité si x' est une racine commune de $\varphi = 0$, $\psi = 0$, et l'on peut écrire cette identité

$$(3) \qquad \psi(x)\frac{\varphi(x') - \varphi(x)}{x' - x} - \varphi(x)\frac{\psi(x') - \psi(x)}{x' - x} = 0,$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Réciproquement, si (1) est une identité, en y faisant $x = x'$, il faudra, en supposant $\psi(x') = 0$, que $\lambda\varphi = 0$; donc $\lambda\varphi = 0$ admet les racines de $\psi = 0$, et $\lambda = 0$ ne peut les admettre toutes, puisqu'il est de degré inférieur à $\psi = 0$; donc $\varphi = 0$ admet au moins une racine de $\psi = 0$; donc les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ont une racine commune.

Cela posé, puisque (2) doit être une identité, en égalant à zéro les coefficients des arguments $x^0, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$, on aura m équations (E) auxquelles satisfera la solution commune x'; le déterminant égalé à zéro de ces équations (E) du premier degré en $x^0, x, x^2, \ldots$ sera la résultante cherchée.

On peut le voir en s'appuyant sur le théorème de M. Hermite, car le déterminant en question est évidemment le discriminant de la fonction du second degré représentée symboliquement par le premier membre de (2), les équations (E) n'étant autre chose que les dérivées partielles de cette fonction.

Mais on peut le voir directement, en observant que si le déterminant de (E) est nul, les équations (E) ont une solution commune; elles ont alors lieu en même temps. Si on les multiplie par x^0, x, x^2, ... et si on les ajoute, on retombe sur l'équation (2) ou (3), qui n'a lieu que si les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ont une solution commune.

La solution commune et ses puissances seront les solutions des équations du premier degré (E) qui se réduisent à $m - 1$ distinctes.

VII. — Résolution de deux équations à deux inconnues.

Nous avons vu comment on formait la résultante des deux équations

$$\varphi(x, z) = 0, \quad \psi(x, z) = 0; \tag{1}$$

cette résultante sera de la forme $R(z) = 0$, R désignant un polynôme de degré mp, possédant en général mp racines. Si R est de degré $mp - \alpha$, nous dirons que la résultante a α racines infinies (¹); chacune des racines de la résultante substituée dans les équations (E) dont il a été question tout à l'heure fournira une solution des équations proposées (1); par conséquent, les équations (1) auront en général mp solutions; ces solutions pourront d'ailleurs être en totalité ou en partie infinies.

Cependant, si les mineurs du déterminant $R(z)$ étaient tous nuls, les équations (E) se réduiraient à $m - 2$ distinctes, et l'élimination de x^3, x^4, ..., x^{m-1} conduirait à une équation

(¹) Je rappelle que, quand dans une équation algébrique les α premiers coefficients tendent vers 0, α racines augmentent indéfiniment.

du second degré en x; il faudrait alors adjoindre deux valeurs en x à la valeur correspondante de z. Il est facile de voir que, dans ce cas, cette valeur de z est racine double de $R = 0$; en effet, en appelant e, e', ... les éléments de R, on a

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \sum \frac{\partial R}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial z};$$

mais $\frac{\partial R}{\partial e}$ est un mineur de z, nul par hypothèse; on a donc $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$ et z est bien racine double de $R = 0$.

Si tous les mineurs du second ordre de R étaient nuls, les équations (E) se réduiraient à $m - 3$ distinctes, l'élimination de $x^1, x^2, \dots, x^{m-1}$ fournirait une équation en x du troisième degré; trois valeurs de x devraient être adjointes à la valeur correspondante de z, qui serait alors racine triple de $R = 0$. En effet, non seulement on aurait $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$, mais

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \sum \left(\frac{\partial^2 R}{\partial e \, \partial e'} \frac{\partial e}{\partial z} \frac{\partial e'}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial e} \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} \right),$$

et, comme $\frac{\partial^2 R}{\partial e \, \partial e'}$ et $\frac{\partial R}{\partial e}$ sont des mineurs des deux premiers ordres de R, on aurait $\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = 0$, etc.

On peut donc dire qu'en comptant pour deux les solutions doubles, pour trois les solutions triples, etc. :

Deux équations des degrés m et p ont mp solutions finies ou infinies, lorsque leur résultante n'est pas identiquement nulle.

Quand la résultante est identiquement nulle, les équations ont, quel que soit z, une solution commune; leurs premiers membres ont un diviseur commun rationnel : ce cas ne se présentera donc jamais quand les équations n'auront pas de diviseur commun rationnel.

On appelle *fonctions symétriques des solutions de plusieurs équations* une fonction de ces solutions, qui ne change pas de valeur quand on permute les éléments correspondants

de deux solutions. Ainsi, si $\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \ldots$ sont les solutions des deux équations (1),

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots, \quad \sum \alpha, \quad \sum \beta, \quad \sum \alpha^2, \ldots$$

seront des fonctions symétriques des solutions en question.

Puisque $\beta, \beta', \ldots$ s'expriment rationnellement au moyen de $\alpha, \alpha', \ldots$: *Toute fonction symétrique des solutions sera une fonction symétrique des α, et par suite une fonction symétrique des racines de la résultante de* (1) *et* (2); *elle s'exprimera donc rationnellement au moyen des coefficients de la résultante, c'est-à-dire au moyen des coefficients de* (1) *et* (2).

VIII. — Théorème de Bézout.

Dans son Ouvrage sur la théorie des équations, devenu aujourd'hui fort rare, Bézout a fait connaître le théorème suivant :

1° *La résultante provenant de l'élimination de $n-1$ inconnues entre n équations algébriques de degrés m_1, $m_2, \ldots, m_n$ à n inconnues peut être mise sous la forme d'une équation entière par rapport à l'inconnue non éliminée, et cette résultante est au plus du degré $m_1 m_2 \ldots m_n$; elle est précisément de ce degré, s'il n'existe aucune relation entre les coefficients des équations proposées.*

2° *Un système de n équations à n inconnues des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$ a précisément $m_1 m_2 \ldots m_n$ solutions, s'il n'existe aucune relation entre les coefficients de ces équations.*

Ce théorème a dû être soupçonné, bien avant d'être démontré; il est de ceux dont la démonstration peut sans inconvénient se faire synthétiquement.

Il a été démontré pour le cas où $n = 2$; nous allons admettre qu'il a lieu pour $2, 3, \ldots, n$ équations, et nous vérifierons qu'il a lieu pour $n+1$ équations.

LEMME I. — *Si*

$$\begin{matrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1n}, \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{2n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

sont les solutions des n équations

$$(1) \qquad \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0,$$

la résultante des équations (1) *et*

$$(2) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

pourra se présenter sous la forme

$$F(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) F(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) \ldots = 0$$

ou, si l'on veut,

$$(3) \qquad \Pi F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) = 0.$$

En effet, l'équation (3) exprime que l'une des solutions au moins du système (1) annule la fonction F, en d'autres termes que les équations (1) et (2) ont une solution commune.

LEMME II. — *Les fonctions symétriques et rationnelles des solutions de* (1) *s'expriment rationnellement au moyen des coefficients de ces équations.*

Appelons R le premier membre de la résultante des équations (1) provenant de l'élimination de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, faisons ensuite varier deux coefficients a et b de φ_1, par exemple, ceux de $x_1^i x_2^j \ldots$, et de $x_1^p x_2^q \ldots$, et exprimons que la résultante ne change pas, non plus que $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

L'équation $\varphi_1 = 0$ deviendra

$$(4) \qquad \varphi_1 + x_1^i x_2^j \ldots \delta a + x_1^p x_2^q \ldots \delta b = 0;$$

mais la résultante R = 0 devient alors, aux termes du second ordre près,

$$(5) \qquad R + \frac{\partial R}{\partial a}\delta a + \frac{\partial R}{\partial b}\delta b = 0.$$

Si la résultante doit rester inaltérée, on aura

$$\frac{\partial R}{\partial a}\delta a + \frac{\partial R}{\partial b}\delta b = 0;$$

mais, si l'on observe que dans (4) φ_1 est nul, il viendra

$$x_1^i x_2^j \dots \partial a + x_1^p x_2^q \dots \partial b = 0.$$

De ces deux équations on tire

$$\frac{\partial R}{\partial a} : x_1^i x_2^j \dots = \frac{\partial R}{\partial b} : x_1^p x_2^q \dots . \tag{6}$$

Ces équations et leurs analogues feront connaître tous les arguments $x_1^i x_2^j \dots$, rationnellement, en fonction des coefficients de R, c'est-à-dire de $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ou de x_n. (On voit que, par exemple, pour calculer x_1, on pourra supposer que a et b sont dans φ_1 les coefficients de $x_1^0 x_2^0 \dots$ et de x_1; on aura alors

$$x_1 = \frac{\partial R}{\partial b} : \frac{\partial R}{\partial a}.$$

Il résulte de là que toute fonction symétrique rationnelle des solutions de (1), peut être considérée comme une fonction symétrique rationnelle des racines de $R = 0$ et pourra s'exprimer rationnellement avec les coefficients de (1). C. Q. F. D.

Cette conclusion suppose bien entendu que nos équations (1) sont tout à fait générales, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relations entre leurs coefficients. Nos raisonnements tomberaient en défaut si $\frac{\partial R}{\partial a}$ et $\frac{\partial R}{\partial b}$ étaient nuls; mais $\frac{\partial R}{\partial a} = 0$ serait une relation entre les coefficients de (1), cas que nous excluons parce que nous n'avons pas besoin de le considérer.

Quoi qu'il en soit, si $\frac{\partial R}{\partial a}$ et $\frac{\partial R}{\partial b}$ étaient nuls, l'équation (5) pourrait être remplacée par

$$R + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}\,\partial a^2 + 2\,\frac{\partial^2 R}{\partial a\,\partial b}\,\partial a\,\partial b + \frac{\partial^2 R}{\partial b^2}\,\partial b^2\right) = 0,$$

et l'équation

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}\,(x_1^p x_2^q \dots)^2 - 2\,\frac{\partial^2 R}{\partial a\,\partial b}\,x_1^{i+p} x_{2\dots}^{j+q} + \dots + \frac{\partial^2 R}{\partial b^2}\,(x_1^i x_2^j \dots)^2 = 0$$

remplacerait, pour le calcul des arguments, l'équation illusoire

$$\frac{\partial R}{\partial a} : x_1^i x_2^j \dots = \frac{\partial R}{\partial b}\, x_1^p x_2^q \dots;$$

mais cette remarque est inutile pour l'objet que nous avons en vue.

LEMME III. — *Si les équations* (1) *contiennent des paramètres $z, z', z'', \ldots$ et conservent leurs degrés $m_1, m_2, \ldots$ en tenant compte dans l'évaluation de ces degrés des paramètres $z, z', z'', \ldots$, toute fonction symétrique entière de leurs solutions sera entière par rapport à $z, z', z'', \ldots$.*

En effet, R contient x_n et $z, z', \ldots$ sous forme entière au degré Πm. Le coefficient de $x_n^{\Pi m}$ ne contient pas $z, z', \ldots$; donc les fonctions symétriques entières des solutions de (1), qui sont des fonctions symétriques entières des racines de $R = 0$, seront entières en $z, z', \ldots$; elles pourront toutefois contenir en dénominateur les coefficients des termes des degrés les plus élevés, de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour aborder la démonstration du théorème de Bézout.

Supposons qu'il s'agisse d'éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations (1) et (2); nous supposerons que les équations (1) et (2) contiennent un paramètre z sous forme entière et conservent leurs degrés en tenant compte de ce paramètre z, dans l'évaluation de leurs degrés. En vertu du lemme I, la résultante cherchée pourra être présentée sous la forme

$$\Pi F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) = 0.$$

Mais le premier membre de cette équation est une fonction symétrique entière des solutions des équations (1) : il sera donc entier et rationnel en z; or le poids de F est p, p désignant le degré de l'équation (2) en $x_1, x_2, \ldots x_n, z$. Le poids de ΠF, ou son degré en z, sera donc $p\Pi m$, ce qui démontre le théorème de Bézout, ou du moins ce qui prouve que le degré de la résultante ne dépassera pas $p\Pi m$, car certaines réductions pourraient s'opérer dans les calculs et faire évanouir le coefficient de la plus haute puissance de z.

On peut montrer sur un cas particulier que la résultante

est de degré $p\Pi m$ et, par conséquent, qu'elle ne peut pas être de degré inférieur dans le cas général. Considérons en effet les équations

$$\begin{aligned}
&(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_{1n+1}z)\ldots(a_{m_11}x_1 + a_{m_12}x_2 + \ldots + a_{m_1n+1}z) = 0,\\
&(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n+1}z)\ldots(b_{m_21}x_1 + \ldots + b_{m_2n+1}z) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&(l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + \ldots + l_{1n+1}z)\ldots(l_{p1}x_1 + \ldots + l_{pn+1}z) = 0.
\end{aligned}$$

Des premières on déduira Πm systèmes de valeurs pour x_1, $x_2, \ldots, x_n$ proportionnelles à z et que l'on pourra considérer comme tout à fait quelconques ; la résultante effectuée, comme il a été expliqué, aura pour premier membre le produit de $z^{p\Pi m}$ par une quantité constante différente de zéro si l'on choisit convenablement les l_{ij}.

IX. — Sur l'équivalence des polynômes.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des degrés respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Nous dirons que deux polynômes F et f sont *équivalents* par rapport aux *diviseurs* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, quand il existera des polynômes entiers λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tels que l'on ait identiquement

$$(1) \qquad F = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n + f.$$

Un polynôme f sera dit *réduit* par rapport aux diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (prises dans cet ordre, si $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ne sont pas égaux) quand il ne contiendra pas de termes divisibles par $x_1^{m_1}$, $x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}$.

Réduire un polynôme, c'est trouver son équivalent réduit.

Nous ne tarderons pas à voir qu'en général il n'existe qu'une manière de réduire un polynôme donné : cette proposition, toutefois, est sujette à des exceptions.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons que les polynômes φ contiennent des variables $z, z', \ldots$ qui entrent dans chaque terme à un degré égal au poids de ce terme.

THÉORÈME. — *Le nombre des termes d'un polynôme réduit par rapport aux fonctions* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *est* Πm.

En effet,

$$(1+x_1+x_1^2+\ldots+x_1^{m_1-1})(1+x_2+\ldots+x_2^{m_2-1})\ldots(1+x_n+\ldots+x_n^{m_n-1})$$

est un polynôme réduit dont tous les coefficients sont égaux à 1; le nombre de ses termes s'obtiendra donc en faisant $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, ce qui donnera Πm. C'est le nombre des termes d'un polynôme réduit quelconque.

X. — Démonstration d'un lemme.

Soient

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1n}, \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

les solutions des équations

$$(2) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0;$$

soit (p. 164)

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)};$$

soit de plus

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{11}^{m_1-1} & \alpha_{12}^{m_2-1} & \ldots \\ 1 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{21}^{m_1-1} & \alpha_{22}^{m_2-1} & \ldots \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant la $i^{\text{ème}}$ *ligne a pour éléments les arguments d'un polynôme réduit en* $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$; *on aura*

$$(3) \qquad \Delta^2 = G \Pi D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

G *désignant une quantité indépendante de* $z, z', \ldots$.

En effet, Δ changeant de signe quand on échange deux de ses lignes, Δ^2 sera une fonction symétrique des solutions de (2) : ce sera donc une fonction entière des z; le second membre de (3) est aussi une fonction entière des z. Or ce second

membre s'annule dès que les équations (2) ont une solution double, tout comme le premier membre Δ^2, mais le second membre ne s'annule que lorsque les équations (2) ont une solution multiple. Donc l'équation (3) a lieu pour une valeur de G qui est un polynôme entier en $z, z', \ldots$; si les deux membres de (3) étaient de même degré en $z, z', \ldots$, G serait alors indépendant des z.

Soit δ_ν le nombre des termes de degré ν dans un polynôme réduit; le degré de Δ par rapport aux α, et par suite par rapport aux z, sera $\Sigma\nu\delta_\nu$; or δ_ν est le coefficient de t^ν dans

$$T = (1 + t + t^2 + \ldots + t^{m_1-1})(1 + t + \ldots + t^{m_2-1})\ldots(1 + t + \ldots + t^{m_n-1});$$

$\nu\delta_\nu$ est le coefficient de $t^{\nu-1}$ dans la dérivée de cette expression T, et enfin $\Sigma\nu\delta_\nu$ est la valeur que prend $\frac{dT}{dt}$ pour $t = 1$: cette valeur est

$$\frac{m_1(m_1-1)}{2}m_2m_3\ldots m_n + \frac{m_2(m_2-1)}{2}m_1m_3\ldots m_n + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{2}\Pi m(\Sigma m - n);$$

le degré de Δ^2 est donc

$$\Pi m(\Sigma m - n).$$

Or le degré de ΠD est le degré de D multiplié par Πm, c'est-à-dire précisément

$$(\Sigma m - n)\Pi m.$$

Δ^2 et ΠD sont donc de même degré, et l'on a bien

$$\Delta^2 = G\Pi D,$$

G désignant une quantité indépendante des z, c'est-à-dire de poids zéro. C. Q. F. D.

XI. — Résolution de quelques problèmes sur les polynômes réduits.

Problème I. — *Calculer la valeur d'un polynôme réduit, connaissant les valeurs qu'il prend quand $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont nuls à la fois.*

Soit F_i la valeur que doit prendre ce polynôme réduit quand on suppose $x_1 = \alpha_{i1}$, $x_2 = \alpha_{i2}$, $\ldots$, $x_n = \alpha_{in}$; si l'on appelle F_0 le polynôme lui-même, on aura

$$\begin{aligned} F_0 &= g_0 + g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_{m_1-1, m_2-1} . x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \ldots, \\ F_1 &= g_0 + g_1 \alpha_{11} + g_2 \alpha_{12} + \ldots, \\ F_2 &= g_0 + g_1 \alpha_{21} + g_2 \alpha_{22} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

g_0, g_1, $\ldots$ étant des coefficients indéterminés. On déduit de là, pour F_0, une expression qui a Δ pour dénominateur; par suite, F_0 existera et sera bien déterminé quand Δ sera différent de zéro, c'est-à-dire quand G et HD seront différents de zéro.

Si l'on appelle φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_i le groupe des fonctions φ d'un même degré M_1; φ_{i+1}, φ_{i+2}, $\ldots$, φ_j le groupe des fonctions φ d'un même degré M_2, $\ldots$, et si l'on suppose $M_1 < M_2 < M_3 < \ldots$, on pourra former plusieurs polynômes réduits nuls, en même temps que φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_n, si l'un des déterminants obtenus en prenant les coefficients des puissances $M_1^{\text{ièmes}}$ de x_1, x_2, $\ldots$, x_i dans φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_i, ou des puissances $M_2^{\text{ièmes}}$ de x_{i+1}, $\ldots$, x_j dans φ_{i+1}, $\ldots$, φ_j $\ldots$, est nul. Considérons en effet le premier groupe, et posons

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= \theta_1 + A_{11} x M_1 + A_{12} x M_1 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_i &= \theta_i + A_{i1} x M_1 + A_{i1} x M_1 - \ldots, \end{aligned} \right.$$

θ_1, θ_2, $\ldots$ étant des polynômes réduits; si le déterminant $\sum \pm A_{11} A_{22} \ldots$ est nul, il y aura une relation linéaire entre $\theta_1 - \varphi_1$, $\theta_2 - \varphi_2$, $\ldots$ telle que

$$a_1(\theta_1 - \varphi_1) + a_2(\theta_2 - \varphi_2) \ldots = 0;$$

et $a_1 \theta_1 - a_2 \theta_2 + \ldots + a_i \theta_i$ sera un polynôme réduit équivalent à zéro; or zéro est déjà un polynôme équivalent à zéro, donc Δ doit s'annuler si le déterminant en question s'annule.

Si le déterminant $\sum \pm A_{11} A_{22} \ldots$ n'est pas nul, posons

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{i+1} &= \theta_{i+1} + B_{11} x_{i+1}^{M_2} + B_{12} x_{i+1}^{M_2} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

tirons des équations (a) les valeurs de $x_1^{M_1}$, $x_2^{M_1}$, ..., par suite de tous les arguments divisibles par ces quantités sous forme réduite, en les multipliant par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, puis par x_1^2, $x_1 x_2, \ldots, x_n^2$, etc., substituons-les dans les formules (b); on voit que, si

$$\sum \pm B_{11} B_{22} \ldots$$

est nul, on obtiendra encore un polynôme réduit équivalent à zéro et non identiquement nul, sinon on aura les équivalents réduits de $x_{i+1}^{M_2}$, ..., et ainsi de suite

Remarque. — *Si aucun des déterminants* $\sum \pm A_{11} \ldots$, $\sum \pm B_{11}, \ldots$ *n'est nul, on pourra, des identités* (a), (b), ..., *déduire tous les arguments divisibles par* $x_1^{M_1}$, $x_2^{M_2}$, ..., $x_n^{M_n}$ *en fonction linéaire des autres à des multiples des diviseurs près, on pourra donc calculer un équivalent réduit à tout argument divisible par l'un des termes* $x_1^{M_1}$, $x_2^{M_2}$, *c'est-à-dire à tout polynôme entier.*

Il pourra toutefois arriver que l'on soit arrêté dans les calculs parce que d'autres déterminants s'annulent, mais on ne sera jamais arrêté quand Δ *ne sera pas nul.*

Théorème I. — *Si la quantité* Δ *est différente de zéro, il n'existera qu'un polynôme réduit prenant* Πm *valeurs données pour les* Πm *systèmes de valeurs de* $x_1, x_2, \ldots$ *qui satisfont aux équations* (2).

Théorème II. — *L'équivalent réduit d'un polynôme donné* F *est bien déterminé quand le déterminant* Δ *est différent de zéro, ce que nous supposerons dorénavant.*

En effet, l'équivalent réduit du polynôme F est égal à F, et par suite donné, pour les systèmes de valeurs de $x_1, x_2, \ldots$ qui annulent $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; d'ailleurs on pourra déterminer cet équivalent réduit par la méthode des coefficients indéterminés.

Si l'équivalent réduit f *d'un polynôme* F *est bien déterminé en général, il n'en est pas de même des polynômes*

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *qui rendent identique la formule*

$$F = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n + f.$$

Pour s'en convaincre, il suffit d'observer qu'il existe une infinité de polynômes $\mu_1, \mu_2, \ldots$ satisfaisant à l'identité

$$(c) \qquad \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \ldots + \mu_n\varphi_n = 0.$$

et qu'alors, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ satisfaisant à l'identité précédente, $\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots$ y satisferont aussi.

Pour satisfaire à l'identité (c), il suffit de prendre

$$\mu_i = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \ldots + a_{in}\varphi_n$$

et de choisir

$$a_{ii} = 0, \quad a_{ij} = -a_{ji},$$

quels que soient les indices i et j.

Problème II. — *Trouver un polynôme réduit qui admette toutes les solutions des équations* (2), *excepté la solution*

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}.$$

Le polynôme

$$f_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \ldots \\ 1 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots \\ . & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

que l'on obtient en remplaçant $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots$ par $x_1, x_2, \ldots$ dans Δ, admet les solutions de (2), excepté $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots$; le polynôme f_2, obtenu en remplaçant $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots$ par $x_1, x_2, \ldots$ dans Δ, admet les solutions de (2), excepté $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots$, et ainsi de suite.

Voici une autre solution :

Il existe une infinité de systèmes de polynômes P_{ij} tels que l'on ait identiquement pour tous les indices i

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\ &\quad = P_{i1}(x_1 - \alpha_1) + P_{i2}(x_2 - \alpha_2) + \ldots + P_{in}(x_n - \alpha_n). \end{aligned}$$

Considérons le polynôme

$$V = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & \ldots & P_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{nn} \end{vmatrix};$$

si nous supposons que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soit une solution de (2), il s'annulera pour toute autre solution des équations (2), car, en ajoutant toutes les lignes respectivement multipliées par $x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2, \ldots$, on forme une ligne dont les éléments sont

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots) - \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots) - \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots), \quad \ldots,$$

c'est-à-dire nuls. Enfin, pour $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots$, P_{ij} devient $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_j}$, et par suite le polynôme en question se réduit à

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}.$$

Il n'est donc pas nul si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ n'est pas une solution multiple de (2), ce que nous supposerons.

Si alors on réduit le polynôme V suivant les diviseurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, on aura la solution du problème proposé, car le polynôme réduit équivalent à V est égal à V pour les valeurs de $x_1, x_2, \ldots$ égales aux termes d'une solution des équations (2). On pourra même réduire V par rapport aux diviseurs $\varphi_1(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots), \varphi_2(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots), \ldots$.

Remarque. — On pourra prendre

$$P_{j1} = \frac{\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_i(\alpha_{i1}, x_2, \ldots, x_n)}{x_1 - \alpha_{i1}},$$

$$P_{j2} = \frac{\varphi_i(\alpha_{i1}, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, x_n)}{x_2 - \alpha_{i2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_{jn} = \frac{\varphi_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, x_n) - \varphi_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})}{x_n - \alpha_{in}};$$

ce choix est avantageux, le calcul nécessaire pour opérer la réduction portant sur un nombre relativement petit d'arguments.

XII. — Calcul de la résultante de plusieurs équations.

Conservons les notations adoptées aux paragraphes précédents, changeons seulement le numérotage des formules et

proposons-nous d'éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations

(1) $$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0,$$

(2) $$F = 0,$$

dans lesquelles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, F sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z entières et de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n, p$; à cet effet, posons

(3) $$Q = \sum_i \frac{u_i^2}{F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)},$$

(4) $$u_i = \xi_{00\ldots} + \alpha_{i1}\xi_{10\ldots} + \alpha_{i2}\xi_{01\ldots} + \ldots;$$

u_i est un polynôme linéaire et homogène par rapport aux ξ, dont les coefficients sont les arguments d'un polynôme réduit en $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots$ par rapport à $\varphi_1(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$, $\varphi_2(\alpha_{i1}, \ldots), \ldots$, en sorte que le déterminant de la substitution (4) qui permet de calculer les u en fonction des ξ est précisément celui que nous avons appelé Δ et que nous supposons différent de zéro.

Le discriminant de Q par rapport aux ξ est égal au discriminant relatif aux u, à savoir $\prod \frac{1}{FD}$ multiplié par le carré $\Delta^2 = HGD$ de la substitution (4), c'est-à-dire à $\frac{G}{HF}$. Changeons de variables et posons

(5) $$\frac{1}{2}\frac{dQ}{d\xi_{pq\ldots}} = x_{pq\ldots} = \sum \frac{u_i \alpha_{i1}^p \alpha_{i2}^q \ldots}{F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)}.$$

Commençons par résoudre les équations (5); à cet effet, appelons $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un polynôme réduit, admettant les solutions de (1), excepté la solution $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots$; alors, en multipliant les équations (5) par les coefficients de ce polynôme et les ajoutant, on trouve

(6) $$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{u_i f_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)}{F(\alpha_{i1}, \ldots) D(\alpha_{i1}, \ldots)},$$

formule où $f_i(x_1, x_2, \ldots)$ est la représentation symbolique d'un polynôme en $x_{pq\ldots}$ que l'on obtient en remplaçant, dans $f_i(x_1, x_2, \ldots)$, $x_1^p x_2^q \ldots$ par $x_{pq\ldots}$. Quant à $f_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$, il est égal à Δ, à un facteur indépendant de z près.

Si l'on remplace, dans Q, u_i par sa valeur tirée de (6), on a

$$(7)\quad Q = \sum F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots) f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) D(\alpha_i, \alpha_{i2}, \ldots)}{f_i^2(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)},$$

en convenant de faire dans le développement du second membre $x_1^p x_2^q \ldots = \alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{pq\ldots}$. Pour calculer le nouveau discriminant de Q par rapport aux $x_{pq\ldots}$, désignons-le par δ; le discriminant $\frac{1}{\Pi F D}$ relatif aux u est égal au discriminant δ, multiplié par le carré du déterminant de la substitution donnant les x en fonction des u [formule (5)]. Ainsi

$$\frac{1}{\Pi F D} = \delta \frac{\Delta^2}{(\Pi F D)^2}$$

ou, réductions faites,

$$\delta = \Pi F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) \frac{D}{\Delta^2} = \frac{\Pi F}{G}.$$

Le discriminant de Q égalé à zéro sera donc la résultante cherchée.

La formule (7) peut s'écrire d'une manière un peu plus commode pour les applications. On peut prendre pour f_i la valeur du polynôme suivant, pourvu que l'on convienne de le réduire,

$$(8)\qquad f_i = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{nn} \end{vmatrix}.$$

Alors $f_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$ sera égal à $D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)$ et l'on aura

$$(9)\qquad Q = \sum F(\alpha_{i1}, \ldots) \frac{f_i(x_1, x_2, \ldots) f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}{D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})}.$$

Désignons simplement par $f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \end{pmatrix}$ ce que devient $f_i(x_1, x_2, \ldots)$ quand on y remplace $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots$ par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, et par $f\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots \\ x_1, x_2, \ldots \end{pmatrix}$ le résultat obtenu en permutant dans $f(x_1, x_2, \ldots)$ les lettres x_1 et α_1, x_2 et α_2, ...

Le polynôme Q, avant d'y supposer

$$x_1^p x_2^q \ldots = x_{pq\ldots} = \alpha_1^p \alpha_2^q \ldots,$$

est un polynôme réduit qui, pour $x_1 = \alpha_{11}$, $x_2 = \alpha_{12}$, ..., devient égal à $F(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots) f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$; pour $x_{12} = \alpha_{21}$, $x_2 = \alpha_{22}$, ... il devient égal à $F(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots) f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$....

Ces conditions, d'après ce qu'on a vu (p. 306), le déterminent complètement. Or l'équivalent réduit de

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) f\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

jouit de la même propriété : on peut donc dire que Q est égal au polynôme précédent réduit, dans lequel on suppose

$$x_1^p x_2^q \ldots = \alpha_1^p \alpha_2^q \ldots = x_{pq\ldots}$$

et l'on verrait de même que Q est aussi égal à

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \end{pmatrix}$$

avec les mêmes restrictions. Pour la commodité des calculs, on fera bien de prendre

$$P_{i1} = \frac{\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_i(\alpha_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1 - \alpha_1},$$

$$P_{i2} = \frac{\varphi_i(\alpha_1, x_2, \ldots, x_n) - \varphi_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, x_n)}{x_2 - \alpha_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

la réduction sera partiellement effectuée à l'avance. Ainsi :

La résultante d'un système, tel que (1), (2), *peut être présentée sous la forme d'un discriminant de fonctions du second degré homogènes égalé à zéro.*

XIII. — Nouvelle manière de former la résultante. — Résolution d'un système d'équations algébriques.

Théorème. — *Si les équations* (1), (2) *ont une solution commune* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *il existera des polynômes* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$ *des degrés* $\mu - m_1, \mu - m_2, \ldots$ *en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

respectivement, μ désignant $m_1 + m_2 + \ldots + m_n + p - n$ tels que l'on ait identiquement

$$(10) \qquad \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n + \lambda F = 0.$$

En effet, si l'on considère les fonctions φ et F mises sous les formes suivantes (φ_i, F sont nuls pour $x_1 = \alpha_1, \ldots$)

$$(11) \begin{cases} \varphi_i = P_{i1}(x_1 - \alpha_1) + P_{i2}(x_2 - \alpha_2) + \ldots + P_{in}(x_n - \alpha_n), \\ F = P_{n+1,1}(x_1 - \alpha_1) + P_{n+1,2}(x_2 - \alpha_2) + \ldots + P_{n+1,n}(x_n - \alpha_n), \end{cases}$$

le polynôme

$$\Theta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & F \\ P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n+1,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

est de la forme du premier membre de (10); d'ailleurs Θ se réduit à zéro, car, en ajoutant à la première toutes les lignes après avoir multiplié la seconde par $-(x_1 - \alpha_1)$, la suivante par $-(x_2 - \alpha_2)$, etc., on obtient à la place de cette première ligne une ligne composée d'éléments nuls en vertu de (11).

C. Q. F. D.

En réduisant ce polynôme Θ avec les diviseurs $\varphi_1(x_1, \ldots)$, $\varphi_2(x_1, \ldots)$, $\varphi_n(x_1, \ldots)$ et $\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, on obtiendra un nouveau polynôme encore identiquement nul. Il est clair que l'on aura le même polynôme identiquement nul Θ_1 en réduisant le produit

$$F \begin{vmatrix} P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nn} \end{vmatrix}.$$

Cela posé, en égalant à zéro les coefficients des arguments $x_1^i x_2^j \ldots$ on aura Πm équations (E) du premier degré par rapport aux arguments $\alpha_1^i \alpha_2^j \ldots$, dont la résultante ou dont le déterminant égalé à zéro sera la résultante cherchée; car le déterminant en question n'est autre chose que le discriminant de la fonction du second degré que nous avons appelée Q au paragraphe précédent.

Les équations (E) font alors connaître les arguments $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots$ et en particulier les éléments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de la solution commune, laquelle, en général, aura ses éléments rationnels par rapport à z.

De là découle la résolution des équations (1), (2) par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$; la résultante fera connaître les valeurs de l'inconnue z, et les équations (E) les valeurs correspondantes des autres inconnues.

A chaque racine finie ou infinie de la résultante $R = 0$ dont le premier membre R est le déterminant des Πm équations (E) qui se réduisent, en vertu de $R = 0$, à $\Pi m - 1$ distinctes, correspond une solution de (1), (2); à moins que les mineurs de R ne soient nuls, auquel cas les équations (E) se réduisent à $\Pi m - 2$ distinctes, entre lesquelles on peut éliminer tous les arguments, excepté α_1 et α_1^2; une équation du second degré fera ainsi connaître α_1 et l'on aura en général deux valeurs de α_1, et deux systèmes de solutions. $R = 0$ a alors une racine double, ce dont on s'assure en appelant e un élément R, et l'on a

$$\frac{dR}{dz} = \sum \frac{\partial R}{\partial e} \frac{de}{dz};$$

comme les mineurs $\frac{\partial R}{\partial e}$ sont nuls, on a $\frac{dR}{dz} = 0$, et $R = 0$ a bien une racine double.

Sans qu'il soit nécessaire de beaucoup insister sur cette discussion, après celle qui a été faite à propos de deux équations, on voit que :

Si la résultante $R = 0$ ne se réduit pas à une identité, *le système* (1), (2) *aura* $p\Pi m$ *solutions finies ou infinies, simples ou multiples parfois indéterminées.*

Dans le cas où les polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ seraient tels qu'ils ne pussent pas servir à réduire le polynôme F, on modifierait les coefficients de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ pour obtenir la résultante, et, dans la résultante trouvée, on ferait tendre les coefficients altérés vers leurs valeurs primitives.

Examinons maintenant le cas intéressant où la résultante

est identique, où R est identiquement nul. Dans ce cas, à chaque valeur de z correspond une solution du système (1), (2); ces solutions forment une suite continue (une courbe, si $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $F = 0$ sont les équations de trois surfaces). Mais, s'il existe des valeurs de z annulant tous les mineurs de R, il existera, indépendamment de la solution générale dont il a été question, une solution dite *singulière* provenant de ce qu'une équation du second degré donne alors les valeurs qu'il faut adjoindre à z pour avoir la solution complète de (1) et (2).

Il pourra arriver que les mineurs de R soient identiquement nuls, il y aura en quelque sorte une double solution continue, et si, pour certaines valeurs particulières de z, les mineurs du second ordre de R sont nuls, il y aura encore une solution singulière correspondante.

Lorsque trois hyperboloïdes ont une génératrice commune, cette génératrice représente la solution générale de leurs équations; les points, où les cubiques gauches qui sont leurs intersections se coupent, constituent une solution singulière.

Lorsque la résultante est identique, les valeurs de x_1, x_2, ..., z qui satisfont aux équations (1), (2) *et qui ne constituent pas une solution singulière, satisfont aussi à l'équation*

$$(\text{A}) \qquad \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, F)}{\partial(x_1, \ldots, x_n, z)} = 0.$$

En effet, si $x_1, x_2, \ldots, z$ est une solution, non singulière, $x_1 + \delta x_1, \ldots, z + \delta z$ sera encore solution pour des valeurs infiniment petites de $\delta x_1, \ldots, \delta z$, en sorte que l'on aura $\varphi_1 + \delta\varphi_1 = 0, \ldots,$ et $\delta\varphi_1 = 0, \ldots,$ ou

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\delta z = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0,$$

formules qui entraînent l'équation (A).

Il est peut-être bon de rappeler que si les fonctions φ et F ne sont pas distinctes, la formule (A) est identique comme la résultante elle-même.

XIV. — Sur les polynômes multiplicateurs.

Les équations (E), dont il a été question au paragraphe précédent et dont le déterminant égalé à zéro fournit la résultante, s'obtiennent en égalant à zéro les coefficients des $x_1^i, x_2^j, \ldots$, dans un polynôme Θ de la forme

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n + \lambda F,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignant des fonctions entières de $x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, F des fonctions de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; les premiers membres de (E) sont donc de la même forme, mais les λ ne contiennent plus les x; le déterminant des équations (E) qui s'obtient en combinant linéairement les premiers membres de ces équations est lui-même de cette forme. Il résulte de là que :

Théorème. — *Étant données des fonctions* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, F *entières en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *il existe toujours des polynômes* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$, *tels que la somme*

$$R = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_n\varphi_n + \lambda F$$

soit indépendante de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *et tels que* $R = 0$ *soit la résultante de* (1), (2).

Ces polynômes λ portent le nom de *polynômes multiplicateurs;* leur existence a été signalée par Bézout. D'après la remarque faite (p. 309), ces polynômes n'ont pas de valeur bien déterminée, et il y a une infinité de systèmes de multiplicateurs capables de fournir la résultante.

Toutefois la valeur réduite de chacun d'eux, par rapport aux fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, F dont il n'est pas le multiplicateur, est bien déterminée, car φ_1 par exemple est connu et égal à $\frac{R}{\varphi_1}$ pour toutes les valeurs qui annulent $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$, F.

Il est facile de trouver des polynômes $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'$, tels que

$$\lambda'_1\varphi_1 + \lambda'_2\varphi_2 + \ldots + \lambda'_n\varphi_n + \lambda' F = S$$

ne contienne plus $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais contienne z; comme alors S s'annule quand (1), (2) ont lieu à la fois, S est nul quand R l'est; donc S est divisible par R et, si par hasard le degré de S était $p \Pi m$, $S = 0$ serait la résultante de (1) et (2).

Si l'on ne prenait pas la précaution de réduire le polynôme que nous avons appelé Θ avant d'en prendre le discriminant, on obtiendrait un polynôme S qui, égalé à zéro, ne donnerait pas toujours la résultante, mais le produit de cette résultante par un facteur étranger.

D'après ce que l'on a vu (p. 313), on peut toujours supposer λ_1 de degré $m_2 + m_3 + \ldots + m_n + p - n$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$; de même λ_2 pourra être supposé de degré $m_1 + m_3 + \ldots + p - n$; malheureusement cette considération ne suffit pas pour déterminer ces polynômes λ.

XV. — Cas où la résultante a des solutions infinies; estimation de son degré.

La résultante de n équations générales des degrés m_1, $m_2, \ldots, m_n$ est de degré $m_1 m_2 \ldots m_n$, mais ce degré peut s'abaisser et ne peut s'abaisser que si la résultante a des solutions infinies.

En thèse générale, pour estimer *a priori* le degré de la résultante d'un système d'équations, il suffira de retrancher du produit des degrés de ces équations le nombre des solutions dans lesquelles la variable non éliminée peut être infinie. L'estimation *a priori* du degré de la résultante dépend donc jusqu'à un certain point de la solution de cette question : *Trouver les solutions infinies d'un système d'équations*, et, par solutions infinies, nous entendons celles dont un ou plusieurs éléments sont infinis.

Prenons d'abord une seule équation de degré m

(1) $$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

rendue homogène, et cherchons l'ensemble des valeurs infinies de $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, ce que nous appellerons le *domaine de l'infini*. A cet effet, considérons l'équation

$$(2) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0.$$

Si nous éliminons x_n entre (1) et (2), nous obtiendrons la condition pour qu'il existe une relation linéaire entre $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Effectuons l'élimination, nous trouvons

$$\varphi\left(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -\frac{a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1}}{a_n}\right) = 0;$$

maintenant, si nous supposons que $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ tendent vers zéro, l'équation résultante se réduira à

$$(3) \qquad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = 0.$$

Or supposer $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ infiniment petits, c'est supposer $x_1, x_2, \dots$, infiniment grands; le *domaine de l'infini*, si je puis m'exprimer ainsi, est donc donné par (3), c'est-à-dire par l'équation proposée dans laquelle on a remplacé x_n par 0, ou dans laquelle on n'a conservé que les termes du degré le plus élevé.

Pour reconnaître si des équations ont des solutions communes infinies, il faudra donc les réduire à leurs termes du degré le plus élevé et chercher si, ainsi réduites, elles ont des solutions communes autres que $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-1} = 0$, c'est-à-dire telles que les rapports $x_1 : x_2 : \dots : x_{n-1}$ soient finis, quelques-uns d'entre eux d'ailleurs pouvant être nuls.

XVI. — Calcul des fonctions symétriques. — Formules de Jacobi.

Soient

$$(1) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_n = 0$$

n équations algébriques des degrés $m_1, m_2, \dots, m_n$ par rapport aux variables $x_1, x_2, \dots, x_n$; soient

$$\begin{matrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \dots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \dots, & \alpha_{2n} \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{matrix}$$

leurs solutions, et

$$(2)\qquad X_1(x_1) = 0,\quad X_2(x_2) = 0,\quad \ldots,\quad X_n(x_n) = 0$$

les résultantes de ces équations provenant respectivement de l'élimination de $x_2, x_3, \ldots, x_n$, de $x_1, x_3, \ldots, x_n$, ...; soient λ_{ij} des multiplicateurs, tels que

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_{11}\varphi_1 + \lambda_{12}\varphi_2 + \ldots + \lambda_{1n}\varphi_n = X_1, \\ \lambda_{21}\varphi_1 + \lambda_{22}\varphi_2 + \ldots + \lambda_{2n}\varphi_n = X_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{n1}\varphi_1 + \lambda_{n2}\varphi_2 + \ldots + \lambda_{nn}\varphi_n = X_n; \end{array}\right.$$

soient encore

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum \pm \lambda_{11}\lambda_{22}\ldots\lambda_{nn},$$

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

Théorème I. — *A s'annule pour tous les systèmes de valeurs de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *qui annulent* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sans annuler toutes les quantités* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Théorème II. — *On a*

$$(4)\quad D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})A(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) = X'_1(\alpha_{i1})X'_2(\alpha_{i2})\ldots X'_n(\alpha_{in}).$$

En effet, si l'on différentie (3), on a

$$\frac{\partial\lambda_{k1}}{\partial x_j}\varphi_1 + \ldots + \frac{\partial\lambda_{kn}}{\partial x_j}\varphi_n + \lambda_{k1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_{kn}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j} = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } j \gtrless k, \\ X'_k \text{ si } j = k, \end{array}\right.$$

et, en faisant $x_1 = \alpha_{i1}$, $x_2 = \alpha_{i2}$, ...,

$$\lambda_{k1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_{ij}} + \lambda_{k2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_{ij}} + \ldots + \lambda_{kn}\frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha_{ij}} = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } i \gtrless k, \\ X'_k(\alpha_{ik}) \text{ si } j = k, \end{array}\right.$$

ce qui démontre le théorème, en vertu de la règle de la multiplication des déterminants.

Théorème III. — *La fonction symétrique*

$$(5)\qquad \sum \frac{F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})}{D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})}$$

est le coefficient de $\dfrac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$ *dans le développement de* $\dfrac{\mathrm{FA}}{\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \ldots \mathrm{X}_n}$.

En effet, dans le développement de $\dfrac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}$, le terme en $\dfrac{1}{x}$ a pour coefficient $\sum \dfrac{\mathrm{F}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, α désignant une racine de $f(\alpha) = 0$; il en résulte que, dans le développement de

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \ldots \mathrm{X}_n},$$

le coefficient de $\dfrac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$ sera

$$\sum \sum \ldots \frac{f(\alpha_{i1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{kn})}{\mathrm{X}'(\alpha_{i1}) \mathrm{X}'(\alpha_{j2}) \ldots \mathrm{X}'(\alpha_{kn})}.$$

Prenons $f = \mathrm{FA}$, F désignant un polynôme quelconque; le coefficient de $\dfrac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$ dans $\dfrac{\mathrm{FA}}{\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \ldots \mathrm{X}_n}$ sera

$$\sum \sum \ldots \frac{\mathrm{F}(\alpha_{i1}, \alpha_{j2}, \ldots) \mathrm{A}(\alpha_{i1}, \alpha_{j2}, \ldots)}{\mathrm{X}'(\alpha_{i1}) \ldots \mathrm{X}'(\alpha_{kn})},$$

ou, en vertu du théorème I,

$$\sum \frac{\mathrm{F}(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) \mathrm{A}(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)}{\mathrm{X}'(\alpha_{i1}) \ldots \mathrm{X}'_n(\alpha_{in})},$$

le signe $\sum$ s'étendant, non plus à toutes les valeurs des α_{ij}, mais aux valeurs simultanées constituant une solution commune aux équations (1). Remplaçons le dénominateur de l'expression précédente par sa valeur tirée de (4); elle deviendra l'expression (5). C. Q. F. D.

Si l'on suppose $\mathrm{F} = \mathrm{D}\psi$, on a le théorème suivant :

Théorème IV. — *La fonction symétrique*

$$\sum \psi(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$$

est le coefficient de $\dfrac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$ *dans le développement de*

$$\frac{\psi \mathrm{A} \mathrm{D}}{\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \ldots \mathrm{X}_n}.$$

Théorème V, *dit* de Jacobi. — *Si* F *est un polynôme de degré inférieur à* $\sum m - n$, degré de D, on a

$$\sum \frac{F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)}{D(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots)} = 0.$$

En effet, cette fonction symétrique est le coefficient de $\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$ dans $\frac{F\Lambda}{X_1 X_2 \ldots X_n}$; or, si l'on appelle δ le degré de F, le degré de λ_{ij} étant $\Pi m - m_j$, celui de Λ sera

$$\sum (\Pi m - m_j) = n \Pi m - \sum m,$$

celui de $F\Lambda$ sera $\delta + n \Pi m - \sum m$, celui de $X_1 X_2 \ldots X_n$ sera $n \Pi m$; le coefficient de $\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$ sera donc zéro, si l'on a

$$\delta - n \Pi m - \sum m < n \Pi m - n$$

ou si

$$\delta < \sum m - n,$$

c'est-à-dire si le degré de F est moindre que celui de D.

C. Q. F. D.

Ce résultat a été établi d'abord par Jacobi dans le *Journal de Crelle*, t. XIV, puis par Cauchy à l'aide du calcul des résidus. Enfin Liouville l'a rencontré incidemment dans ses recherches sur l'élimination (voir son *Journal*, t. VI, 1re série.) La démonstration que nous venons d'en donner est au fond celle de Cauchy.

XVII. — Théorème de M. Enrico Betti.

M. Betti a fait connaître, dans les *Annales de Tortolini* pour l'année 1858, une formule qui permet de calculer une fonction symétrique quelconque des solutions de plusieurs équations. Nous allons d'abord l'exposer pour le cas d'une seule équation.

Soit $\varpi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ le produit des carrés des différences des quantités $t_1, t_2, \ldots, t_n$; soit $\varphi(x) = 0$ une équation ayant pour racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Considérons l'expression

$$(1) \qquad \frac{\varphi'(t_1)\varphi'(t_2)\ldots\varphi'(t_n)\varpi(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\varphi(t_1)\varphi(t_2)\ldots\varphi(t_n)\varpi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)};$$

abstraction faite de sa partie entière, cette expression est égale à

$$\sum_i \frac{1}{t_1 - \alpha_i} \frac{\varpi(\alpha_i, t_2, \ldots, t_n)}{\varpi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} \frac{\varphi'(t_2)}{\varphi(t_2)} \cdots$$

et à

$$\sum_i \sum_j \frac{1}{t_1 - \alpha_i} \frac{1}{t_2 - \alpha_j} \frac{\varpi(\alpha_i, \alpha_j, t_3, \ldots, t_n)}{\varpi(\alpha_i, \ldots, \alpha_n)} \frac{\varphi'(t_3)}{\varphi(t_3)} \cdots$$

ou enfin à

$$\sum_{i,j\ldots} \frac{1}{(t_1 - \alpha_i)(t_2 - \alpha_j)\ldots(t_n - \alpha_k)} \frac{\varpi(\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha_k)}{\varpi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)}.$$

Or le numérateur de la quantité placée sous le signe $\sum$ est égal à zéro ou à son dénominateur selon que $\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha_k$ ne sont pas ou sont tous différents; il en résulte que l'expression (1) a pour partie fractionnaire

$$(2) \qquad \sum \frac{1}{(t_1 - \alpha_i)(t_2 - \alpha_j)\ldots(t_n - \alpha_k)},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs des α qui, dans une même fraction, sont différentes. Or, dans le développement de l'expression (2), les coefficients des arguments $t_1^{-i} t_2^{-j} \ldots t_n^{-k}$ sont précisément toutes les fonctions symétriques simples des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; donc :

Théorème I. — *Toutes les fonctions symétriques simples des racines de $\varphi = 0$ sont les coefficients des divers arguments $t_1^{-i}, t_2^{-j}, \ldots$ dans le développement de l'expression* (1).

Voici maintenant le théorème de M. Enrico Betti :

Théorème II. — *Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ des polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et*

$$(3) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0$$

des équations algébriques admettant les μ *solutions*

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1n}, \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \ldots, & \alpha_{2n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\mu 1}, & \alpha_{\mu 2}, & \ldots, & \alpha_{\mu n}; \end{array}$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ *les résultantes provenant de l'élimination de toutes les variables, moins* x_1, *de toutes les variables moins* x_2, *etc.;* $\Lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *le déterminant des multiplicateurs qui fournissent les résultantes* $X_1, X_2, \ldots, X_n = 0$, *enfin* $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *le déterminant fonctionnel de* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *et* $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *le produit* ΛD. *La fonction*

$$G = \prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\theta(t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{in})}{X_1(t_{i1})X_2(t_{i2})\ldots X_n(t_{in})} \prod_{s=1}^{s=n} \frac{\varpi(t_{1s}, t_{2s}, \ldots, t_{\mu s})}{\varpi(\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \ldots, \alpha_{\mu s})},$$

développée suivant les puissances et les produits des quantités t^{-1}, *aura pour coefficients les diverses fonctions symétriques simples des solutions des équations* (3).

Rappelons qu'en vertu des théorèmes I et II du paragraphe précédent on a

$$\theta(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) = 0 \quad \text{ou} \quad = X'_1(\alpha_{i1})X'_2(\alpha_{i2})\ldots X'_n(\alpha_{in}),$$

suivant que toutes les valeurs de i sont différentes ou sont les mêmes; par suite.

$$G = \prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{X'_1(t_{i1})X'_2(t_{i2})\ldots}{X_1(t_{i1})X_2(t_{i2})\ldots} \prod_{s=1}^{s=n} \frac{\varpi(t_{1s}, t_{2s}, \ldots, t_{\mu s})}{\varpi(\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \ldots, \alpha_{\mu s})},$$

ou, en négligeant un polynôme entier,

$$G = \prod_{i=1}^{i=\mu} \sum \frac{1}{t_{i1} - \alpha_{ij}} \frac{1}{t_{i2} - \alpha_{ik}} \ldots \prod_{s=1}^{s=n} \frac{\varpi(\alpha_{js}, \alpha_{ks}, \ldots, \alpha_{ls})}{\varpi(\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \ldots, \alpha_{\mu s})},$$

ou enfin

$$G = \sum \prod \frac{1}{t_{pq} - \alpha_{uv}},$$

p, q, u, v désignant quatre entiers différents, ce qui démontre

le théorème énoncé. Le théorème de M. Betti ne rend pas pratique le calcul des fonctions symétriques et l'on ne trouvera sans doute jamais un moyen de rendre ce calcul pratique, mais il met en lumière un théorème de M. Schläfli : c'est que toutes les fonctions symétriques entières des solutions des équations (3) contiennent seulement en dénominateur les coefficients des premiers termes des résultantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Ainsi la fonction symétrique

$$\sum \alpha_{11}^{i}\,\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n}^{k} \times \alpha_{21}^{i'}\,\alpha_{22}^{j'}\ldots\alpha_{2n}^{k'} \times \ldots,$$

coefficient de $\dfrac{1}{t_{11}^{i+1}\,t_{12}^{j+1}\ldots}$ dans G, contiendra en dénominateur le facteur

$$A_1^{\Sigma i} A_2^{\Sigma j} \ldots A_n^{\Sigma k},$$

$A_1, A_2, \ldots$ désignant les coefficients de $x_1^{\mu}, x_2^{\mu}, \ldots$ dans les polynômes $X_1, X_2, \ldots, X_n$. On peut toujours faire en sorte que $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, en rendant les résultantes entières par rapport aux coefficients. Ainsi la fonction symétrique considérée devient entière en la multipliant par $A^{\Sigma i + \Sigma j \ldots}$.

La résultante des équations (3) et $F = 0$, mise sous la forme $\Pi F(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots) = 0$, deviendra donc entière en la multipliant par une puissance du coefficient de la plus haute puissance de la variable non éliminée dans l'une des résultantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

XVIII. — Remarque importante sur les solutions communes à plusieurs équations.

Si, dans la formule de Jacobi démontrée au paragraphe XI, on fait $F(x) = 1, x_1, x_2, \ldots$, on trouve

$$\mu = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+h)}{1.2.3\ldots h} \text{ [1]}$$

relations entre les solutions communes aux équations $\varphi_1 = 0$,

---

[1] Ce nombre est égal au nombre des termes d'un polynôme du degré h à n variables.

$\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$, h étant inférieur d'une unité au degré de D, dans ces relations entreront les $\nu = \sum \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m_i)}{1.2.3\ldots m_i}$ coefficients de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Le degré de D est $\sum m_i - n$; donc $h = \sum m_i - n - 1$, donc

$$\mu = \frac{(n+1)(n+2)\ldots\left(\sum m_i - 1\right)}{\left(\sum m_i - n - 1\right)!}.$$

En général, μ est plus grand que ν, de sorte qu'entre les équations fournies par le théorème de Jacobi on pourra éliminer les coefficients de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, et l'on voit qu'il existera des relations indépendantes des coefficients entre les solutions de $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots$; donc :

On ne peut pas choisir arbitrairement les solutions d'un système d'équations algébriques à plusieurs inconnues.

XIX. — Propriétés de la résultante.

Considérons n équations à n inconnues des degrés m_1, $m_2, \ldots, m_n$, savoir :

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \end{cases}$$

soit

$$R = 0$$

la résultante provenant de l'élimination de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Supposons

$$\varphi_1 = \sum a_{ij\ldots} x_1^i x_2^j \ldots,$$

$$\varphi_2 = \sum b_{ij\ldots} x_1^i x_2^j \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

faisons varier les coefficients $a_{ij\ldots}$ et $a_{pq\ldots}$ de $\delta a_{ij\ldots}$, $\delta a_{pq\ldots}$ et exprimons que dans ces conditions R ne varie pas. On aura

$$(2) \qquad \frac{\partial R}{\partial a_{ij\ldots}} \delta a_{ij\ldots} + \frac{\partial R}{\partial a_{pq\ldots}} \delta a_{pq\ldots} = 0,$$

et, si l'on veut que les solutions ne varient pas non plus, on aura

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{ij\ldots}} \delta a_{ij\ldots} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{pq\ldots}} \delta a_{pq\ldots} = 0$$

ou

$$(3) \qquad x_1^i x_2^j \ldots \delta a_{ij\ldots} + x_1^p x_2^q \ldots \delta a_{pq\ldots} = 0.$$

De (2) et (3) on tire

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_{ij\ldots}} : x_1^i x_2^j \ldots = \frac{\partial R}{\partial a_{pq\ldots}} : x_1^p x_2^q \ldots$$

ou, si l'on veut,

$$(4) \qquad x_1^i x_2^j \ldots = \frac{\partial R}{\partial a_{ij\ldots}} : \frac{\partial R}{\partial a_{00\ldots}};$$

de même

$$(4\ bis) \qquad x_1^i x_2^j \ldots = \frac{\partial R}{\partial b_{ij\ldots}} : \frac{\partial R}{\partial b_{00\ldots}}, \ \ldots.$$

En éliminant les arguments $x_1^i x_2^j \ldots$ par division, par exemple, on tire de là une foule d'équations entre les dérivées partielles de la fonction R.

On peut trouver encore d'autres relations en observant que R est homogène en $a_{ij\ldots}$, $a_{pq\ldots}$ $\ldots$ et de degré $\frac{\Pi m}{m} = \mu$; on a ainsi

$$\mu R = a_{00\ldots} \frac{\partial R}{\partial a_{00\ldots}} + \ldots a_{ij\ldots} \frac{\partial R}{\partial a_{ij\ldots}} + \ldots;$$

de même, en posant $\frac{\Pi m}{m_2} = \mu'$,

$$\mu' R = b_{00\ldots} \frac{\partial R}{\partial b_{00\ldots}} + \ldots b_{ij\ldots} \frac{\partial R}{\partial b_{ij\ldots}} + \ldots.$$

On peut encore trouver de nouvelles relations en observant que R ne change pas quand on change x_1 en $x_1 + \delta x_1$, x_2 en $x_2 + \delta x_2$, $\ldots$: on a donc

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = 0$$

ou bien

$$\sum \frac{\partial R}{\partial a_{ij\ldots}} \delta a_{ij\ldots} + \sum \frac{\partial R}{\partial b_{ij}} \delta b_{ij} + \ldots = 0,$$

en désignant par $a_{ij\ldots} + \delta a_{ij\ldots}$ ce qui devient $a_{ij\ldots}$ quand on a remplacé x_1 par $x_1 + \delta x_1$.

Ce changement ramène $\varphi_1 = 0$ à la forme

$$\sum a_{ij\ldots}(x + \delta x_1)^i x_2 \ldots$$

ou

$$\sum \Big[(i+1) a_{i+1,j\ldots} \delta x_1 + a_{ij\ldots} \Big] x_1^i x_2^j \ldots,$$

en sorte que

$$\delta a_{ij\ldots} = (i+1) a_{i+1,j\ldots} \delta x_1.$$

On a donc

$$\left.\begin{aligned} &\sum \frac{\partial R}{\partial a_{ij\ldots}} (i+1) a_{i+1,j\ldots} \\ +&\sum \frac{\partial R}{\partial b_{ij}} (i+j) b_{i+1,j\ldots} \\ +&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} = 0$$

et d'autres équations analogues. Ces équations permettent quelquefois de déterminer les coefficients de la résultante quand on en connaît la partie littérale.

Ces dernières équations sont celles auxquelles satisfont les invariants des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; nous ne tarderons pas à constater en effet que la fonction R est un invariant.

On voit comment il faudrait modifier les résultats précédents si les dérivées partielles de R par rapport aux $a_{ij\ldots}$, $b_{ij\ldots}$ étaient toutes nulles, et comment cette circonstance décèlerait la présence d'une solution multiple.

XX. — Résultants.

Théorème I. — *La résultante de plusieurs équations algébriques, telles qu'il n'existe aucune relation entre*

leurs coefficients, est irréductible par rapport à ces coefficients (¹).

En effet, si cette résultante n'était pas irréductible, elle serait de la forme $R = PQ = 0$, P et Q désignant des polynômes entiers par rapport aux coefficients a, b, c, ... des équations proposées. Or $R = 0$ établit, entre les coefficients en question, une relation qui permet de regarder l'un d'eux, a, comme fonction des autres; si l'on considère les équations $P = 0$, $Q = 0$, elles sont satisfaites par certains systèmes de valeurs de a, b, c, ..., et, pour ces systèmes, $\frac{\partial a}{\partial b}$, $\frac{\partial a}{\partial c}$, ... ont deux valeurs, savoir celles que l'on peut tirer de $P = 0$ et celles que l'on peut tirer de $Q = 0$. En différentiant $R = 0$, la règle des fonctions implicites donnera

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{\partial R}{\partial b} : \frac{\partial R}{\partial a}, \quad \frac{\partial a}{\partial c} = \frac{\partial R}{\partial c} : \frac{\partial R}{\partial a}, \quad \ldots.$$

Pour que $\frac{\partial a}{\partial b}$, $\frac{\partial a}{\partial c}$, ... soient indéterminés, il faut que $\frac{\partial R}{\partial a}$, $\frac{\partial R}{\partial b}$, ... soient nuls, ce qui établit des relations entre les quantités a, b, c, ... Si donc les équations proposées sont telles qu'il n'existe pas de relations entre leurs coefficients, la résultante sera irréductible $\left(\text{d'ailleurs } \frac{\partial R}{\partial a} = 0, \frac{\partial R}{\partial b} = 0, \ldots \text{ ne sauraient être des identités, sans quoi R ne dépendrait pas des coefficients des équations proposées}\right)$.

Puisque la résultante est irréductible quand il n'existe pas de relations entre les coefficients a, b, c, ..., on pourra toujours supposer que l'on ait mis cette résultante sous forme entière en la multipliant par un facteur, fonction des coefficients de poids nul, tel que cette résultante mise sous forme entière ne soit pas décomposable. Le premier membre sera alors parfaitement déterminé, à un facteur près indépendant de tous les coefficients.

(¹) Je crois devoir rappeler qu'une équation $Rx = 0$ est irréductible par rapport à des quantités a, b, c, ... quand un premier membre n'admet pas de diviseur rationnel en x, a, b, c, ...

Considérons maintenant n équations homogènes par rapport aux inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, savoir :

(1) $$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots \quad \varphi_n = 0,$$

et supposons-les des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Si l'on élimine $x_2, x_3, \ldots x_n$, on trouve une résultante de la forme entière

$$R_1 x_1^{\Pi m} = 0;$$

si l'on élimine toutes les inconnues, moins x_2, on obtient

$$R_2 x_2^{\Pi m} = 0,$$

R_2 étant, comme R_1, entier par rapport aux coefficients de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ et irréductible, etc...

Je dis que l'on peut supposer $R_1 = R_2$. En effet, l'équation $R_1 = 0$ exprime que les équations (1) ont une solution commune dans laquelle x_1 n'est pas nul, et $R_2 = 0$ exprime que les mêmes équations ont une solution commune dans laquelle x_2 n'est pas nul. Si l'on suppose qu'il n'existe pas de relations entre les coefficients de (1), ces équations n'auront pas de solutions pour lesquelles $x_1, x_2 \ldots$ seraient nuls, puisque l'on rejette celles dans lesquelles on aurait soit $x_1 = 0$, soit $x_2 = 0$; R_1 et R_2 sont donc égaux, à un facteur numérique près.

On appellera *éliminant* ou *résultant* des fonctions homogènes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ le premier membre de l'équation résultante, mis sous forme entière, des équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$, abstraction faite du facteur $x_1^{\Pi m}$, ou $x_2^{\Pi m}$, ou, etc.

Le résultant est donc bien déterminé, à un facteur près indépendant des coefficients de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

Théorème II. — *Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des fonctions homogènes de $x_1, x_2, \ldots x_n$ des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$; soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ des fonctions homogènes de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et toutes de degrés. Si l'on fait, dans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$,*

$$x_1 = \theta_1(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$x_2 = \theta_2(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ces fonctions deviendront de nouvelles fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ *de* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *et, si l'on appelle* R *le résultant de* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, S *celui de* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, r *celui de* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, *on aura*

$$S = R^{s^{n-1}} r^{\Pi m}.$$

En effet, les solutions de $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0, \ldots, \psi_n = 0$ comprennent :

1° Les solutions des équations

$$\frac{\theta_1}{\alpha_1} = \frac{\theta_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\theta_n}{\alpha_n},$$

dans lesquelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignent une solution de $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0 \ldots$ lorsque les coefficients sont liés par la relation $R = 0$; ces solutions sont au nombre de $s^{n-1}\Pi m$ et par suite le résultant S contiendra en facteur $R^{s^{n-1}}$.

2° Les solutions de $\theta_1 = 0$, $\theta_3 = 0, \ldots, \theta_n = 0$ qui entrent en facteurs dans ces équations aux degrés $sm_1, sm_2, \ldots, sm_n$; le résultant s devra donc s'annuler en même temps que r et avoir les solutions de r à un degré de multiplicité égal à $m_1 m_2 \ldots = \Pi m$.

Corollaire I. — *Les résultants de plusieurs formes sont des invariants de ces formes, et, si dans les formes* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, *on effectue une substitution linéaire, leur résultant se trouvera multiplié par* $\Gamma^{\Pi m}$, Γ *désignant le déterminant de la substitution.*

Théorème III. — *Le résultant de plusieurs formes est un combinant de ces formes.*

En effet, si l'on pose

$$\begin{cases} \psi_1 = \gamma_{11}\varphi_1 + \gamma_{12}\varphi_2 + \ldots + \gamma_{1n}\varphi_n, \\ \psi_2 = \gamma_{21}\varphi_1 + \gamma_{22}\varphi_2 + \ldots + \gamma_{2n}\varphi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

le résultant de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ peut s'obtenir en observant qu'il peut être considéré comme le résultant des formes trans-

formées des formes linéaires

$$(a)\qquad \begin{cases} \gamma_{11} z_1 + \gamma_{12} z_2 + \ldots + \gamma_{1n} z_n, \\ \gamma_{21} z_1 + \gamma_{22} z_2 + \ldots + \gamma_{2n} z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

par la substitution non linéaire $z_1 = \varphi_1$, $z_2 = \varphi_2$, ...; le résultant de ψ_1, ψ_2, .. sera donc, en vertu du théorème II, égal au résultant Γ des formes linéaires (a), élevé à la puissance $s - 1$, degré maximum des formes φ et multiplié par le résultant de ces formes; en d'autres termes, si l'on appelle R le résultant des formes φ, S celui des formes ψ, Γ le déterminant de la substitution (a), on a

$$S = R\Gamma^{s^n - 1}.$$

XXI. — Discriminants.

On appelle *discriminant* d'une fonction homogène le résultant de ses dérivées prises par rapport à chacune de ses variables.

On appelle *racines singulières* d'une forme les systèmes de valeurs des variables qui annulent à la fois la forme et toutes ses dérivées, ou, pour éviter un pléonasme, qui annulent ses dérivées.

Lorsque le discriminant d'une fonction φ est nul, l'équation $\varphi = 0$, qui permet de considérer l'une des variables comme fonction des autres, donne pour les dérivées partielles de cette variable des valeurs indéterminées.

Lorsque le discriminant est identiquement nul, il y a toute une suite de valeurs des variables pour lesquelles les dérivées partielles de l'une d'elles sont indéterminées, et *vice versa* d'ailleurs.

Théorème I. — *Le discriminant d'une fonction est un invariant de cette fonction.*

En effet, considérons la fonction homogène $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de degré m. Si l'on effectue la substitution

$$\begin{array}{l} x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 + \ldots + \gamma_{1n} y_n, \\ x_2 = \gamma_{21} y_1 + \gamma_{22} y_2 + \ldots + \gamma_{2n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

on aura

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\gamma_{11} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}\gamma_{21} + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\gamma_{n1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array} \right.$$

donc, en appelant Γ le déterminant de la substitution, le résultant des seconds membres de (1) sera $\Gamma^{(m-1)^{n-1}}$ multiplié par le discriminant Δ de φ. Si ensuite on effectue la substitution sur les dérivées $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots$, le nouveau résultant relatif aux y sera égal à l'ancien $\Delta\Gamma^{(m-1)^{n-1}}$ multiplié par $\Gamma^{(m-1)^n}$, de sorte que, D désignant le nouveau discriminant, on aura

$$D = \Delta\Gamma^{(m-1)^n + (m-1)^{n-1}} = \Delta\Gamma^{m(m-1)^{n-1}}.$$

Pour $m = 2$, on a $D = \Delta\Gamma^2$, ce qui s'accorde avec ce que l'on savait déjà sur les discriminants des fonctions du second degré.

Théorème II. — *Lorsque le discriminant d'une forme s'annule, les dérivées du discriminant par rapport aux coefficients de la forme sont proportionnelles aux dérivées de la forme prises par rapport aux mêmes coefficients.*

En effet, soit Δ le discriminant d'une forme φ; faisant varier les coefficients $a, b, \ldots$ de cette forme et les variables x_1, $x_2, \ldots$ de telle sorte que Δ ne varie pas, on a

$$(1) \qquad 0 = \frac{\partial\Delta}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\Delta}{\partial b}\delta b + \ldots;$$

mais on a aussi, en appelant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ les dérivées $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \ldots$ et en observant que $x_1 + \delta x_1$, $x_2 + \delta x_2, \ldots$ doivent

vérifier les équations $\varphi_1 + \delta\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 + \delta\varphi_2 = 0$, ...

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\varphi_1}{\partial b}\delta b + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\delta x_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_2}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\varphi_2}{\partial b}\delta b + \ldots = 0.$$

....

Multiplions la première de ces équations par x_1, la seconde par x_2, ... et ajoutons, en observant que, si l'on appelle m le degré de φ, on a

$$x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots = m\varphi;$$

on trouve

$$m\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\delta x_1 + m\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\delta x_1 + \ldots + m\frac{\partial\varphi}{\partial a}\delta a + m\frac{\partial\varphi}{\partial b}\delta b + \ldots = 0$$

et, si l'on observe que φ admet les racines singulières,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}\delta a + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\delta b + \ldots = 0.$$

Comparant cette formule avec (1), on a

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a} : \frac{\partial\varphi}{\partial a} = \frac{\partial\Delta}{\partial b} : \frac{\partial\varphi}{\partial b} = \ldots.$$

C. Q. F. D.

De là un moyen de trouver les racines singulières sans avoir calculé Δ, pourvu que l'on fasse usage du théorème § XIX.

XXII. — Sur un théorème propre à faciliter dans certains cas le travail de l'élimination.

THÉORÈME. — *Si les équations homogènes de degré m*

(1) $$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0$$

admettent une solution commune, cette solution satisfera aussi aux équations

$$\Delta = 0, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\Delta}{\partial x_n} = 0,$$

où l'on a

$$\Delta = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Supposons d'abord les degrés des équations (1) quelconques et respectivement égaux à m_1, m_2, ..., m_n; on pourra, en vertu du théorème des fonctions homogènes (p. 221), écrire ces équations ainsi qu'il suit :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} x_n - m_1\varphi_1 = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} x_n - m_2\varphi_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

les valeurs de x_1, x_2, ..., qui satisfont à ces équations, satisfont donc aussi à

$$\Delta = 0.$$

Maintenant, si $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, on déduira de (2)

$$\Delta x_1 = m\left[\varphi_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}} + \varphi_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}} + \ldots\right],$$

$$\Delta x_2 = m\left[\varphi_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}} + \varphi_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}} + \ldots\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, en général,

$$\Delta x_i = m\left[\varphi_1 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}} + \varphi_2 \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}} + \ldots\right];$$

on en tire

$$x_i \frac{\partial\Delta}{\partial x_j} = m\left[\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j} \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}} + \ldots\right].$$

Si $i = j$, il faudra ajouter Δ au premier membre. Si l'on suppose que l'on remplace x_1, x_2, ... par les solutions de (1), en tout cas que i soit égal à j ou différent de j, on a

$$x_i \frac{\partial\Delta}{\partial x_j} = m\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j} \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j} \frac{\partial\Delta}{\partial\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}} + \ldots\right];$$

or le second membre de cette équation est égal à zéro ou à Δ, c'est-à-dire toujours égal à zéro, donc

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_j} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème suppose que la solution commune ne se rapporte pas aux valeurs nulles de $x_1, x_2, \ldots$, sans quoi il serait évident; d'ailleurs la démonstration précédente ne s'applique pas à ce cas.

Si le système (1) se réduit à trois équations de second degré, les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0$$

et les trois équations

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = 0$$

seront du second degré; en éliminant $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3$, on aura sous forme de déterminant la résultante des équations proposées.

XXIII. — Sur une élimination remarquable.

Proposons-nous d'éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations

(1) $$f = \sum a_{ij} x_i x_j = 0$$

et

(2) $$\left\{ \begin{array}{l} c_{11} \quad x_1 + c_{12} \quad x_2 + \ldots + c_{1n} \quad x_n = 0, \\ c_{21} \quad x_1 + c_{22} \quad x_2 + \ldots + c_{2n} \quad x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_{n-1,1} x_1 + c_{n-1} x_2 + \ldots + c_{n-1,n} x_n = 0. \end{array} \right.$$

A cet effet, écrivons l'équation (1) sous la forme

(3) $$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots = 0;$$

multiplions la première équation (2) par λ_1, la seconde par

$\lambda_2, \ldots$ et ajoutons avec (3), puis égalons à zéro les coefficients de $x_1, x_2, \ldots$: nous aurons

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_{11}\lambda_1 + c_{21}\lambda_2 + \ldots + c_{n-1,1}\lambda_{n-1} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + c_{12}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + \ldots + c_{n-1,2}\lambda_{n-1} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si, entre ces équations et (2), on élimine $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, en remplaçant $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ par leurs valeurs

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \quad \ldots,$$

on a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n-1,1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n-1,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{n-1,n} \\ c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots & . \\ c_{n-1,n} & c_{n-1,n} & \ldots & c_{n-1,n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce résultat a été obtenu par Hesse.

XXIV. — Principe de correspondance.

Le principe de correspondance, nettement énoncé pour la première fois par Chasles, consiste en ce que :

Si sur une droite D *on a deux séries de points* $X_1, X_2, \ldots$, *et* $Y_1, Y_2, \ldots$, *tels qu'à chaque point* X *correspondent* n *points* Y *et qu'à chaque point* Y *correspondent* m *points* X, *le nombre des points* X *coïncidant avec leurs correspondants* Y *est* $m + n$ (pourvu que cette correspondance des points X et Y s'exprime au moyen d'une équation algébrique).

Nous appellerons les points X coïncidant avec leurs correspondants des *coïncidences*.

La démonstration du principe en question est fort simple. Soient $x_1, x_2, \ldots$ les abscisses des points $X_1, X_2, \ldots$,

comptés sur la droite D à partir d'un point fixe O de cette droite ; y_1, y_2, ... celles des points Y_1, Y_2. . . ; l'abscisse x d'un point quelconque X et l'abscisse y d'un point quelconque Y seront liées entre elles par une équation

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

de degré m en x et n en y ; les coïncidences seront données en prenant $x = y$, et par suite leurs abscisses seront racines de l'équation $f(t, t) = 0$. Si l'équation (1) est complète, $f(t, t)$ sera de degré $m + n$, ce qui démontre le théorème.

Voici une autre démonstration du même principe donnée par M. Zeuthen.

Soit C un point de la droite D où n'ait pas lieu une coïncidence ; par ce point menons une droite quelconque et prenons deux points fixes A, B sur cette droite, joignons ces

Fig. 1.

points à deux points correspondants X, Y ; le lieu des points M de rencontre de AX et BY sera une certaine courbe que nous allons étudier et que nous appellerons la *courbe* (M).

La courbe (M) rencontre AM en n points, en général situés à distance finie, distincts du point A ; mais la courbe (M) a en outre au point A un point d'ordre m, car, le point C étant considéré comme un point Y, m droites AX correspondront à BC et seront d'ailleurs autant de tangentes à la courbe M.

Ainsi la courbe M est de degré $m + n$, elle a en A un point d'ordre m et en B un point d'ordre n.

Le principe de correspondance découle de là, car les coïncidences sont les points où le lieu M coupe la droite D.

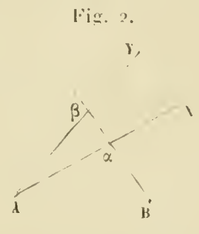
Le principe de correspondance peut être généralisé comme il suit :

Si par un point passe une série de droites U, V, *et qu'à chaque droite* U *correspondent* m *droites* V, *qu'à chaque droite* V *correspondent* n *droites* V, *le nombre des droites* U *coïncidant avec leurs correspondantes* V (*ou coïncidences*) *sera* $m + n$.

Chasles a fait une application du principe de correspondance à la recherche du nombre des intersections de deux courbes situées à distance finie (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1855).

Considérons deux courbes d'ordres m et n : soient C et D ces courbes; prenons deux points fixes A, B dans leur plan, mais hors de ces courbes. Par A faisons passer une droite AX,

Fig. 2.



elle rencontrera C en m points α; joignons B aux points α; les droites ainsi menées au nombre de m couperont D en mn points β.

En joignant A aux points β, on aura mn droites AY correspondant à AX ; réciproquement, à chaque droite AY correspondent mn droites AX.

Lorsque les courbes C, D ont un point commun (α, β), la droite AαX coïncide avec une droite AYβ ; mais deux droites AX, AY peuvent coïncider sans cela : c'est ce qui arrivera quand on considérera la sécante AB, car mn droites coïncidentes sont confondues avec AB; il en résulte que, si AB ne passe pas par des points communs aux deux courbes, ce que l'on peut supposer, C et D auront mn points communs, situés en général à distance finie.

EXERCICES ET NOTES.

1. Nous désignons, pour abréger, par (pq') le déterminant $pq'-qp'$. Cela posé, la résultante de

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0, \\ a'x^2+b'x+c'=0 \end{cases}$$

est

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') \\ (ac') & (bc') \end{vmatrix} = 0.$$

La résultante de

$$\begin{cases} ax^3+bx^2+cx+d=0, \\ a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0 \end{cases}$$

est

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') \\ (ac') & (ad')+(bc') & (bd') \\ (ad') & (bd') & (cd') \end{vmatrix} = 0.$$

La résultante de

$$\begin{cases} ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0, \\ a'x^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e'=0 \end{cases}$$

est

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') & (ae') \\ (ac') & (ad')+(bc') & (ae')+(bd') & (be') \\ (ad') & (ae')+(bd') & (be')+(cd') & (ce') \\ (ae') & (be') & (ce') & (de') \end{vmatrix} = 0.$$

2. Le discriminant de l'équation

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$$

a été mis par M. Cayley sous la forme

$$16(I^3-27J^2),$$

$$I = ae-4bd+3c^2, \quad J = ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3.$$

3. On a

$$\frac{a^m-b^m}{a-b} = a^{m-1}+ba^{m-2}+\ldots+b^{m-1};$$

cette formule peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a^m & b^m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a^{m-1}+ba^{m-2}+\ldots+b^{m-1}.$$

On la généralise ainsi :

$$\begin{vmatrix} a^m & b^m & \dots & l^m \\ a^{n-1} & b^{n-1} & \dots & l^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^2 & b^2 & \dots & l^2 \\ a & b & \dots & l \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a^n & b^n & \dots & l^n \\ a^{n-1} & b^{n-1} & \dots & l^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^2 & b^2 & \dots & l^2 \\ a & b & \dots & l \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \sum a^i b^j \dots l^k,$$

formule où $n-1$ désigne le nombre des variables $a, b, \dots, l$ et où $i+j+\dots+l = m-n$.

4. On a, en appelant $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines de $\varphi(x) = 0$,

$$\sum \frac{1}{(t_1-\alpha_i)(t_2-\alpha_j)\dots(t_n-\alpha_k)}$$
$$= (-1)^n \frac{\varphi(t_1)\varphi(t_2)\varphi(t_n)}{\varpi(t_1, t_2, \dots, t_n)} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} \frac{\varpi(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\varphi(t_1)\varphi(t_2)\dots\varphi(t_n)}.$$

Dans cette formule, $\varpi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est le produit de toutes les différences des quantités $t_1, t_2, \dots, t_n$, et dans le premier membre il faut supposer les binômes $t_i - \alpha_j$ tels que $i \lessgtr j$ (BORCHARDT, *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1855).

5. Le discriminant d'un produit de m fonctions de n variables est identiquement nul quand $m < n$.

6. Cauchy a fait connaître dans ses *Anciens Exercices* une méthode pour le calcul des fonctions symétriques qui est très remarquable. Cette méthode est reproduite dans l'*Algèbre supérieure* de M. J.-A. Serret. Cauchy a fait également connaître deux méthodes d'élimination pour le cas de deux équations, l'une dans les *Anciens Exercices*, l'autre dans les *Nouveaux Exercices*. La première est peu connue; c'est cependant une des plus fécondes que l'on connaisse.

7. Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ et $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ les cosinus directeurs de quatre droites; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 et x_4, y_4, z_4 les coordonnées de quatre points appartenant respectivement à ces quatre droites; la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde est que, en posant

$$l_i = \beta_i z_i - \gamma_i y_i, \quad m_i = \gamma_i x_i - \alpha_i z_i, \quad n_i = \alpha_i y_i - \beta_i x_i,$$

les déterminants obtenus en prenant quatre colonnes dans le tableau suivant soient nuls :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & l_1 & m_1 & n_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & l_2 & m_2 & n_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & l_3 & m_3 & n_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & l_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix}.$$

Ces conditions rentrent en partie les unes dans les autres.

8. Pour éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre les équations

$$F = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n = 0,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. F sont des fonctions entières de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut prendre les φ pour diviseurs; soient $F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ les équivalents réduits de F et des produits de F par les arguments réduits; en éliminant les arguments réduits considérés comme des paramètres distincts, entre $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $\ldots$, $F_\mu = 0$, on a la résultante cherchée.

CHAPITRE XII.

RÉSOLUTION DES QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM.

I. — Règle générale pour trouver les maxima et les minima des fonctions explicites.

On dit qu'une fonction d'une ou de plusieurs variables $f(x, y, z, \ldots)$ passe par un maximum pour un certain système de valeurs des variables $x, y, z, \ldots$, quand pour ce système de valeurs on a

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots) < f(x, y, z, \ldots),$$

quels que soient les signes de $h, k, l, \ldots$, pourvu que ces quantités soient inférieures en valeur absolue à une quantité finie, aussi petite que l'on voudra, du reste. Si l'on avait au contraire, pour les valeurs de $h, k, \ldots$ que l'on vient de définir,

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots) > f(x, y, z, \ldots),$$

on dirait que f passe par un minimum pour le système des valeurs de $x, y, z, \ldots$ fournissant cette relation.

Si l'on remplace h par dx, k par dy, $\ldots$, on pourra dire que f passe par un maximum (ou un minimum) quand

$$f(x+dx, y+dy, \ldots) - f(x, y, \ldots) = \Delta f$$

conserve, quels que soient les signes de $dx, dy, \ldots$, le signe $+$ (ou le signe $-$).

En résumé, pour savoir si $f(x, y, z, \ldots)$ passe par un maximum ou un minimum, il faut étudier les variations de signe de Δf, quand on fait varier $dx, dy, \ldots$.

La formule de Taylor donne (en la supposant applicable)

$$\Delta f = df + E_2, \tag{1}$$

E_m désignant en général un terme d'ordre supérieur à $m - 1$. Le terme df du premier ordre donne son signe au second membre de (1), et par suite à Δf, car on peut écrire

$$df + E_2 = df\left(1 + \frac{E_2}{df}\right).$$

Or $\frac{E_2}{df}$ a pour limite 0 pour $dx = 0$, $dy = 0$, ...; donc, si dx, dy, ... sont assez petits, $1 + \frac{E_2}{df}$ sera positif et $df\left(1 + \frac{E_2}{df}\right)$ ou $df + E_2$ aura le signe de df. D'ailleurs

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \ldots$$

change de signe avec dx, dy, ...; donc, si l'on n'a pas *identiquement* $df = 0$, Δf changera de signe avec dx; dy, ... et f ne sera ni maximum, ni minimum; donc :

Théorème I. — *Pour qu'une fonction f passe par un maximum ou un minimum, il faut que la différentielle df passe par la valeur* 0.

Mais cette condition n'est pas suffisante, et, si $df = 0$, on a

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}\,d^2 f + E_3; \tag{2}$$

et, pour que le signe de Δf soit indépendant de dx, dy, ..., il faut que $d^2 f$, qui donne son signe à Δf, ait lui-même un signe indépendant de ceux de dx, dy, ...

Il y aura maximum si $d^2 f$ reste négatif, minimum dans le cas contraire.

Si $d^2 f$ s'annule, quels que soient dx, dy, ..., on posera

$$\Delta f = \frac{1}{1.2.3}\,d^3 f + E_4.$$

Le signe de Δf sera celui de $d^3 f$; or ce signe change avec ceux de dx, dy, ..., car $d^3 f$ est un polynôme homogène du

troisième degré en $dx, dy, \ldots$. Donc il n'y aura ni maximum ni minimum, à moins que $d^3 f$ soit nul, quels que soient $dx, dy, \ldots$; il faudrait alors poser

$$\Delta f = \frac{1}{1.2.3.4} d^4 f + E_5,$$

et ainsi de suite.

En résumé, *pour qu'une fonction f passe par un maximum ou un minimum, il faut que sa différentielle première soit nulle; il faut, en outre, que la première différentielle, qui n'est pas nulle, quels que soient $dx, dy, \ldots$, soit d'ordre pair, et qu'elle conserve toujours le signe — pour qu'il y ait maximum et le signe + pour qu'il y ait minimum.*

Passons aux applications :

1° *La fonction f ne contient qu'une seule variable x.* Ses différentielles sont alors égales à ses dérivées, aux facteurs $dx, dx^2, dx^3, \ldots$ près, et l'on peut dire que :

Une fonction d'une variable passe par un maximum (ou un minimum) quand, la première dérivée s'annulant, la première de celles qui ne s'annulent pas est d'ordre pair, négative (ou positive). Cette condition est nécessaire et suffisante (pourvu toutefois que cette fonction soit développable par la formule de Taylor).

2° *La fonction f contient plusieurs variables indépendantes $x, y, z, \ldots$*; alors, df devant être nul, quels que soient $dx, dy, \ldots$, comme l'on a

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \ldots,$$

il faut que l'on ait séparément $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ldots$.

Ainsi, *pour qu'une fonction de plusieurs variables indépendantes soit maxima ou minima, il faut que ses dérivées partielles du premier ordre soient nulles.*

Mais il faut aussi que $d^2 f$ conserve son signe, quels que soient $dx, dy, \ldots$, et que ce signe soit + dans le cas du

minimum, — dans le cas du maximum; or d^2f est un polynôme du second degré, de la forme

$$d^2f = \sum a_{ij}\xi_i\xi_j,$$

dans lequel on a posé, pour abréger,

$$dx = \xi_1, \quad dy = \xi_2, \quad \ldots$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = a_{12}, \quad \ldots.$$

Pour savoir si ce polynôme est susceptible de changer de signe, on le décomposera en une somme de carrés.

Si tous les carrés sont positifs, d^2f sera toujours positif et il y aura minimum; si tous les carrés sont négatifs, il y aura maximum; enfin, si parmi ces carrés il y en a de signes opposés, d^2f pourra changer de signe, et il n'y aura ni maximum, ni minimum.

Quand d^2f est identiquement nul, la discussion paraît beaucoup plus difficile, mais on n'a jamais besoin de la pousser aussi loin.

Pour reconnaître le signe de d^2f, il n'est pas besoin de décomposer $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ en carrés; on peut former l'équation (*voir* p. 238 et suiv.)

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0.$$

dont le premier membre est le discriminant de

$$\sum a_{ij}\xi_i\xi_j - s(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2).$$

Cette équation a toutes ses racines réelles, on peut lui appliquer la règle des signes de Descartes. Le nombre des carrés positifs et négatifs dans lesquels $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ peut se décomposer est égal au nombre de ses racines positives et négatives, et par suite :

Pour que f soit minimum, il suffit que l'équation (4) n'ait que des variations, et, pour que f soit minimum, il suffit qu'elle n'ait que des permanences.

Si l'équation (4) a des variations et des permanences, f n'est ni maximum ni minimum.

II. — Quelques exemples de détermination de maxima et de minima.

Problème I. — *Trouver dans le plan le plus court chemin d'un point* A *à un point* B *en passant par une droite donnée, les deux points* A *et* B *étant situés d'un même côté de la droite.*

Prenons pour axe des x la droite donnée et une droite perpendiculaire pour axe des y. Soient a et p les coordonnées du point A, celles du point B pourront être représentées par $a+l$ et q, l désignant la distance des points A et B comptée parallèlement à l'axe des x. Le chemin cherché se compose d'une ligne brisée sur l'axe des x; soit $a+x$ l'abscisse du point où le plus court chemin cherché rencontre l'axe des x, la quantité à rendre minima est

$$(1) \qquad \sqrt{p^2+x^2}+\sqrt{q^2+(l-x)^2}.$$

Pour trouver le minimum de cette expression, égalons sa dérivée, par rapport à x, à zéro; nous aurons

$$(2) \qquad \frac{x}{\sqrt{p^2+x^2}}-\frac{l-x}{\sqrt{q^2+(l-x)^2}}=0.$$

Sans qu'il soit nécessaire de tirer x de cette équation, on voit que les deux droites dont se compose le chemin cherché font avec la droite donnée (l'axe des x) des angles dont les cosinus sont égaux, et par suite :

Le plus court chemin cherché est brisé de telle façon que ses deux parties font des angles égaux avec la droite donnée.

La dérivée seconde de l'expression (1) est

$$\frac{p^2}{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{q^2}{[q^2+(l-x)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

c'est-à-dire positive; la valeur de x tirée de (2) fournira donc bien, comme on devait s'y attendre, un minimum [à la vérité, l'équation (2) fournira deux valeurs de x, quand on aura fait évanouir les radicaux, mais il ne s'agit que de la valeur pour laquelle les radicaux sont positifs, et pour laquelle $a < x < a + l$, si l'on suppose, par exemple, a et $l > 0$].

Problème II. — *Trouver un point tel que la somme des carrés de ses distances à des points fixes soit un minimum.*

Soient x, y, z les coordonnées du point cherché, x_i, y_i, z_i celles de l'un des points donnés, prises par rapport à trois axes rectangulaires quelconques: la quantité à rendre minima est

$$\sum[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]; \tag{1}$$

en égalant ses dérivées partielles à zéro, on a

$$\sum(x-x_i)=0,\quad \sum(y-y_i)=0,\quad \sum(z-z_i)=0$$

et, en appelant n le nombre des points donnés dans l'espace,

$$x=\frac{1}{n}\sum x_i,\quad y=\frac{1}{n}\sum y_i,\quad z=\frac{1}{n}\sum z_i;$$

le point demandé x, y, z n'est autre chose, comme l'on voit, que le point que l'on appelle en Géométrie le *centre des moyennes distances,* et en Mécanique le *centre de gravité* du système des points en question.

Quoiqu'il soit évident que nous sommes en présence d'un minimum, nous allons le vérifier par l'examen de la différentielle seconde de la fonction (1); cette différentielle est

$$2\,dx^2+2\,dy^2+2\,dz^2.$$

On voit qu'elle est essentiellement positive, puisqu'elle est

la somme de trois carrés, et la solution trouvée correspond bien, comme nous l'avons observé, à un minimum.

Problème III. — *Trouver le polygone d'aire maxima que l'on peut former avec des côtés donnés.*

Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ les sommets successifs du polygone; $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, ..., $A_nA_1 = a_n$ les côtés donnés; $r_1, r_2, \ldots, r_{n-3}$ les diagonales $A_1A_3, A_1A_4, \ldots, A_1A_{n-1}$. Si l'on se rappelle que l'aire d'un triangle dont les côtés sont a, b, c est donnée par la formule

$$\sqrt{-(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2)},$$

l'aire à rendre maxima sera

$$\begin{aligned}&\sqrt{-(a_1^4+a_2^4+r_1^4-2a_1^2a_2^2-2a_1^2r_1^2-2a_2^2r_1^2)}\\ &+\sqrt{-(r_1^4+a_3^4+r_2^4-2a_3^2r_1^2-2a_3^2r_2^2-2r_1^2r_2^2)}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Désignons, pour abréger, par $s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}$ les radicaux qui entrent dans cette formule; la condition du maximum s'exprimera en égalant à zéro les dérivées partielles relatives à $r_1^2, r_2^2, \ldots$, ce qui donnera

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{s_1}(r_1^2-a_1^2-a_2^2)+\frac{1}{s_2}(r_1^2-a_3^2-r_2^2)=0,\\ &\frac{1}{s_2}(r_2^2-a_3^2-r_1^2)+\frac{1}{s_3}(r_2^2-a_4^2-r_3^2)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}\right.$$

or, dans un triangle de côtés a, b, c, d'angles A, B, C et d'aire S, on a

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad S = \tfrac{1}{2}bc\sin A.$$

L'application de ces formules transforme les équations (1) dans les suivantes :

$$\begin{aligned}&\operatorname{tang} A_1A_2A_3 + \operatorname{tang} A_1A_4A_3 = 0,\\ &\operatorname{tang} A_1A_3A_4 + \operatorname{tang} A_1A_5A_4 = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

lesquelles expriment que les angles $A_1A_2A_3$ et $A_1A_4A_3$ sont supplémentaires, ainsi que $A_1A_3A_4$ et $A_1A_5A_4$, ...; donc le cercle qui passe par $A_1A_2A_3$ passe par A_4, par A_5, ...: donc enfin le polygone maximum a tous ses sommets sur un même cercle, il est *inscriptible*.

C. Q. F. D.

III. — Sur le maximum des fonctions de plusieurs variables liées entre elles.

Il peut arriver que l'on demande le maximum ou le minimum d'une fonction de plusieurs variables liées entre elles par des équations non résolues: il est même parfois élégant d'introduire dans une question de maximum des variables auxiliaires liées aux variables principales. Pour trouver le maximum ou le minimum, on égalera toujours la différentielle de la fonction que l'on veut rendre maxima ou minima à zéro. En effet, une fonction f de plusieurs variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, liées entre elles par k équations, telles que

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

est au fond une fonction de $n - k$ de ces variables qui pourront être considérées comme indépendantes, les autres x_1, x_2, ..., x_k, par exemple, étant des fonctions de celles-ci données par les équations (1). La différentielle totale de f prise par rapport à ces variables, à savoir

$$U_{k+1}\,dx_{k+1} + U_{k+2}\,dx_{k+2} + \ldots + U_n\,dx_n,$$

doit donc être nulle pour que f soit maximum ou minimum

C. Q. F. D.

Les variables x_{k+1}, x_{k+2}, ... étant indépendantes, dx_{k+1},

$dx_{k+2}, \ldots$ sont arbitraires, et les conditions du maximum ou du minimum sont

$$U_{k+1} = 0, \quad U_{k+2} = 0, \quad \ldots, \quad U_n = 0.$$

Pour calculer les expressions U_{k+1}, U_{k+2}, ..., ou, ce qui revient au même, la différentielle de f par rapport aux variables indépendantes, on différentiera f par rapport à toutes les variables, ce qui donnera

$$(2) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

On différentiera aussi les équations (1), ce qui donnera

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

De (3) on tirera $dx_1, dx_2, \ldots, dx_k$ et, en portant leurs valeurs dans (2), on aura df sous la forme

$$U_{k+1} dx_{k+1} + \ldots + U_n dx_n.$$

Au fond, cette méthode revient à égaler à zéro la différentielle de f prise par rapport à toutes les variables, c'est-à-dire à poser

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

à éliminer entre (3) et (4) $dx_1, dx_2, \ldots, dx_k$ et à égaler à 0 les coefficients des différentielles restantes $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$.

On peut diriger les calculs d'une façon élégante en employant la méthode des multiplicateurs de Bézout.

Multiplions les équations (3) respectivement par les indéterminées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ et ajoutons-les à l'équation (4). On pourra déterminer ces quantités λ par la condition que les coefficients de $dx_1, dx_2, \ldots, dx_k$ soient nuls : l'élimination de ces quantités sera alors faite; en égalant à zéro les

coefficients de $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$, on aura les conditions du maximum ou du minimum. On obtient ainsi les équations

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} = 0. \end{array}\right.$$

Je le répète, on peut supposer que k de ces équations déterminent $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$; les $n - k$ autres sont les équations du maximum ou du minimum, et servent alors à déterminer les variables x concurremment avec les équations (1).

Au fond, cette méthode revient à éliminer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ entre les équations (5); les résultantes et (1) font connaître les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour lesquelles il y a maximum ou minimum. Je dis qu'il faut éliminer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, car il n'y a aucun intérêt, en général, à connaître ces quantités, qui jouent dans la question un rôle tout à fait secondaire.

Il est important d'observer que l'on arriverait au même résultat en cherchant le maximum ou le minimum de la fonction

$$F = f + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ seraient traités comme des constantes dans la différentiation.

Il est bon d'observer aussi que, si l'on veut discuter la différentielle $d^2 f$, les quantités $dx_1, dx_2, \ldots$ n'y sont plus arbitraires; mais cette discussion est le plus souvent inutile.

Une dernière remarque : la fonction f à rendre maxima pourrait se trouver engagée sous un signe fonctionnel, dans une équation non résolue : ainsi, étant données les relations (1), on pourrait demander de rendre maxima la fonction f donnée par la formule

$$(6)\qquad \varphi(f, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0;$$

on remplacerait alors la formule (2) par celle-ci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

obtenue en différentiant (6), et en n'écrivant pas le terme $\frac{\partial \varphi}{\partial f} df$, nul en vertu de la règle qui prescrit d'égaler df à zéro.

IV. — Applications des théories précédentes.

Problème I. — *Trouver le parallélépipède rectangle maximum inscriptible dans un ellipsoïde.*

Soit

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde; le volume à rendre maximum est, à un facteur constant près, xyz; on posera donc

(2) $$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0;$$

en différentiant (1), on a

(3) $$\frac{x\,dx}{a^2} + y\frac{dy}{b^2} + z\frac{dz}{c^2} = 0;$$

multipliant (3) par λ, ajoutant avec (2) et égalant à zéro les coefficients de dx, dy, dz, on a

$$yz - \frac{\lambda x}{a^2} = 0, \quad zx - \frac{\lambda y}{b^2} = 0, \quad xy - \frac{\lambda z}{c^2} = 0;$$

l'élimination de λ donne

$$\frac{a^2 yz}{x} = \frac{b^2 xz}{y} = \frac{c^2 xy}{z}$$

ou bien

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{y^2} = \frac{c^2}{z^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z},$$

ce qui prouve que les côtés sont proportionnels aux axes de

l'ellipsoïde et que les sommets sont situés sur les diagonales du parallélépipède circonscrit à l'ellipsoïde ayant pour côtés les axes.

Reprenons le problème traité plus haut :

Problème II. — *Trouver le plus court chemin d'un point A à un point B en rencontrant une droite située dans le même plan que ces points.*

Soient p et q les distances respectives de A et B à la droite, l la distance des deux points comptée parallèlement à la droite, enfin x et y les distances du point où le plus court chemin se brise aux pieds des perpendiculaires abaissées de A et B sur la droite ; on a

$$x + y = l, \tag{1}$$

et la quantité à rendre minima est

$$\sqrt{x^2 + p^2} + \sqrt{y^2 + q^2}.$$

Différentions (1) et égalons à zéro la différentielle de la quantité à rendre minima ; nous aurons

$$dx + dy = 0, \quad \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + p^2}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2 + q^2}} = 0;$$

multiplions la première équation par λ, ajoutons avec la seconde et égalons à zéro les coefficients de dx et dy ; nous aurons

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + p^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + q^2}} = \lambda,$$

d'où λ se trouve éliminé.

Cette méthode, plus élégante que celle que nous avons employée plus haut, conduit aux mêmes conclusions (p. 347).

Problème III. — *De tous les polygones isopérimètres d'un même nombre de côtés, quel est le plus grand?*

Pour résoudre cette question, désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les sommets du polygone.

Soient $a_1 = A_1A_2$, $a_2 = A_2A_3$, ..., $a_i = A_iA_{i+1}$ ses côtés successifs.

Soient $r_3 = A_1A_3$, $r_4 = A_1A_4$, ... ses diagonales issues de A_1.

Soient s_2 l'aire du triangle $A_1A_2A_3$, s_3 celle de $A_1A_3A_4$, ...

L'aire à rendre maxima est

$$(1)\quad \begin{cases} \sqrt{-(a_1^4 + a_2^4 + r_3^4 - 2a_1^2a_2^2 - 2a_1^2r_3^2 - 2a_2^2r_3^2)} \\ + \sqrt{-(r_3^4 + r_4^4 + a_3^4 - 2r_3^2r_4^2 - 2a_3^2r_3^2 - 2a_3^2r_2^4)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

on a d'ailleurs la condition

$$(2)\qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \text{const.}$$

Pour résoudre la question, il faudra égaler à zéro les différentielles de (1) et de (2), ce qui donnera

$$(1\ bis)\quad \begin{cases} \sum r_i dr_i\left(\dfrac{r_i^2 - a_i^2 - r_{i+1}^2}{s_i} + \dfrac{r_i^2 - a_{i-1}^2 - r_{i-1}^2}{s_{i-1}}\right) \\ \qquad\qquad + \sum a_i da_i \dfrac{a_i^2 - r_i^2 - r_{i+1}^2}{s_i} = 0 \end{cases}$$

et

$$(2\ bis)\qquad \sum da_i = 0.$$

Ajoutons ces équations après avoir multiplié la seconde par λ, et égalons à zéro les coefficients de dr_i et da_i; nous aurons

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{r_i^2 - a_i^2 - r_{i+1}^2}{s_i} + \dfrac{r_i^2 - a_{i-1}^2 - r_{i-1}^2}{s_{i-1}} = 0, \\ a_i\,\dfrac{a_i^2 - r_i^2 - r_{i+1}^2}{s_i} + \lambda = 0; \end{cases}$$

or

$$r_i^2 - a_i^2 - r_{i+1}^2 = -2\cos A_1A_{i+1}A_i\, a_i r_{i+1},$$

$$s_i = \tfrac{1}{2} a_i r_{i+1} \sin A_1A_{i+1}A_i$$

et, par suite,

$$\frac{r_i^2 - a_i^2 - r_{i+1}}{s_i} = -4\cot A_1A_{i+1}A_i, \quad \ldots;$$

les formules (3) peuvent donc s'écrire

$$\cot A_1A_{i+1}A_i + \cot A_1A_{i-1}A_i = 0,$$

$$\lambda - 4a_i\cot A_iA_1A_{i+1} = 0.$$

La première de ces formules montre que le quadrilatère $A_1 A_{i-1} A_i A_{i+1}$ est inscriptible : le polygone lui-même l'est donc aussi ; la seconde montre que l'on a

$$a_i \cot A_i A_1 A_{i+1} = a_{i-1} \cot A_{i-1} A_1 A_i = \ldots;$$

si l'on joint le centre du cercle circonscrit aux sommets du polygone, les demi-angles aux centres ainsi formés étant désignés par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i$, la formule précédente donnera

$$\frac{a_1}{\operatorname{tang} \omega_1} = \frac{a_2}{\operatorname{tang} \omega_2} = \frac{a_3}{\operatorname{tang} \omega_3} = \ldots,$$

c'est-à-dire que les distances du centre du polygone aux divers côtés seront égales. Il faut pour cela que les côtés du polygone demandé soient égaux ; ce polygone est donc régulier.

Problème IV. — *De tous les polygones de même aire et d'un même nombre de côtés, trouver celui dont le périmètre est le plus petit.*

Les équations de ce problème sont les mêmes que celles du problème précédent ; en effet, au lieu de rendre minima l'expression (1), il faudra la supposer constante et rendre minima la somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; dans l'un et l'autre cas, on devra égaler à zéro les différentielles de ces deux expressions, ce qui fournira dans l'un et l'autre cas les équations (1 *bis*) et (2 *bis*), après quoi on appliquera comme plus haut la méthode des multiplicateurs et l'on sera conduit aux mêmes calculs que dans le problème précédent ; on verra donc, comme précédemment, que le polygone cherché doit être régulier.

La démonstration géométrique des résultats auxquels nous venons d'arriver ne présente aucune difficulté : on la trouvera tout au long dans le Traité de Géométrie de Legendre revu par Blanchet et dans celui de MM. Rouché et de Comberousse.

V. — Digression sur la plus courte distance de deux droites.

On peut résoudre par la théorie des maxima diverses questions élémentaires, dont la solution a déjà été donnée autrement.

Proposons-nous, par exemple, de trouver la plus courte distance de deux droites. Soient a, b, c les cosinus directeurs de la première, a', b', c' ceux de la seconde; soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point fixe de la première, x, y, z les coordonnées d'un autre point variable pris sur cette même droite; soient x'_0, y'_0, z'_0 un point fixe de la seconde droite, x', y', z' un point variable de cette droite; soient ρ la distance des points x, y, z et x_0, y_0, z_0, ρ' celle des points x', y', z' et x'_0, y'_0, z'_0.

On aura

$$x = x_0 + a\rho, \quad x' = x'_0 + a'\rho',$$
$$y = y_0 + b\rho, \quad y' = y'_0 + b'\rho',$$
$$z = z_0 + c\rho, \quad z' = z'_0 + c'\rho'.$$

La quantité à rendre minima est le carré p^2 de la distance des points x, y, z et x', y', z', à savoir

$$p^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

ou, en vertu des formules précédentes,

$$(1) \quad p^2 = (X + a\rho - a'\rho')^2 + (Y + b\rho - b'\rho')^2 + (Z + c\rho - c'\rho')^2,$$

équation dans laquelle on a posé, pour abréger,

$$X = x_0 - x'_0, \quad Y = y_0 - y'_0, \quad Z = z_0 - z'_0.$$

En égalant à zéro les dérivées de p^2 relatives à ρ et ρ', on a

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = (X + a\rho - a'\rho')a + (Y + b\rho - b'\rho')b + (Z + c\rho - c'\rho')c, \\ 0 = (X + a\rho - a'\rho')a' + (Y + b\rho - b'\rho')b' + (Z + c\rho - c'\rho')c'; \end{cases}$$

en observant que $a^2 + b^2 + c^2$ est égal à 1 et que $aa' + bb' + cc'$

est égal au cosinus de l'angle ω des deux droites, on a

$$aX + bY + cZ + \rho - \rho' \cos\omega = 0$$

et de même

$$a'X + b'Y + c'Z + \rho\cos\omega - \rho' = 0.$$

Ces formules donnent ρ et ρ', et par suite (1) donne p^2; mais, pour calculer p^2, il vaut mieux observer que des formules (2) on tire

$$\frac{X + a\rho - a'\rho'}{bc' - cb'} = \frac{Y + b\rho - b'\rho'}{ca' - ac'} = \frac{Z + c\rho - c'\rho'}{ab' - ba'},$$

et l'on peut écrire à la suite

$$= \frac{\sqrt{\sum(X + a\rho - a'\rho')^2}}{\sqrt{\sum(bc' - cb')^2}} \text{ et aussi } = \frac{\sum(bc' - cb')(X + a\rho - a'\rho')}{\sum(bc' - cb')^2}.$$

Comme $\sum a(bc' - cb')$ et $\sum a'(bc' - cb')$ sont nuls, les formules précédentes peuvent s'écrire, en tenant compte de (1),

$$\frac{X + a\rho - a'\rho'}{bc' - cb'} = \frac{Y + b\rho - b'\rho'}{ca' - ac'} = \frac{Z + c\rho + c'\rho'}{ab' - ba'}$$

$$= \pm \frac{p}{\sqrt{\sum(bc' - cb')^2}} = \frac{\sum X(bc' - cb')}{\sum(bc' - cb')^2},$$

d'où l'on peut déduire ρ et ρ' et directement

$$p = \frac{\sum X(bc' - cb')}{\sqrt{\sum(bc' - cb')^2}},$$

ou bien encore

$$p = \frac{(x_0 - x'_0)(bc' - cb') + (y_0 - y'_0)(ca' - ac') + (z_0 - z'_0)(ab' - ba')}{[(bc' - cb')^2 + (ac' - ca')^2 + (ab' - ba')^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

VI. — Digression relative aux axes de l'ellipsoïde.

Chercher les axes de l'ellipsoïde

$$(1)\qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = H,$$

c'est calculer les rayons vecteurs ρ maximum ou minimum de cet ellipsoïde ; on posera

$$(2)\qquad x = \rho a,\quad y = \rho b,\quad z = \rho c,$$

$$(3)\qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Si l'on porte les valeurs (2) de x, y, z dans (1), on aura

$$(4)\qquad \rho^2 = \frac{H}{Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ac + 2B''ab},$$

et l'on est conduit à chercher le maximum et le minimum de

$$Aa^2 + Bb^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ac + 2B''ab.$$

En égalant sa différentielle à zéro, on a

$$(5)\qquad \begin{aligned} &da(Aa + B''b + B'c) + db(B''a + A'b + Bc)\\ &\qquad + dc(B'a + Bb + A''c) = 0; \end{aligned}$$

la formule (3) différentiée donne

$$a\,da + b\,db + c\,dc = 0;$$

en l'ajoutant à (5), après l'avoir multipliée par s et en égalant à zéro les coefficients de da, db, dc, on a

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &(A - s)a + B''b + B'c = 0,\\ &B''a + (A' - s)b + Bc = 0,\\ &B'a + Bb + (A'' - s)c = 0. \end{aligned}\right.$$

L'élimination de s fera connaître les valeurs de a, b, c pour lesquelles il y a maximum ou minimum. Mais la quantité $\frac{H}{\rho^2}$ ou, en vertu de (4), $Aa^2 + A'a^2 + \ldots$ à rendre maxima peut se déduire des formules (6); il suffit de les ajouter après avoir multiplié la première par a, la deuxième par b, la troi-

sième par c, ce qui donne

$$\frac{\text{H}}{\rho^2} - s = 0 \quad \text{ou} \quad \rho^2 = \frac{\text{H}}{s}.$$

Il résulte de là que les axes sont donnés par la formule bien connue

$$\begin{vmatrix} \text{A} - \frac{\text{H}}{\rho^2} & \text{B}'' & \text{B}' \\ \text{B}'' & \text{A}' - \frac{\text{H}}{\rho^2} & \text{B} \\ \text{B}' & \text{B} & \text{A}'' - \frac{\text{H}}{\rho^2} \end{vmatrix} = 0.$$

VII. — Axes de la section plane d'un ellipsoïde.

Nous montrerons encore comment la théorie des maxima peut conduire à trouver les axes de la section faite par le plan

(1) $$lx + my + nz = 0.$$

(2) $$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

dans la surface

(3) $$\text{A}x^2 + \text{A}'y^2 + \text{A}''z^2 + 2\text{B}yz + 2\text{B}'xz + 2\text{B}''xy = \text{H}$$

ou

$$f(x, y, z) = 0.$$

Considérons dans la section un rayon vecteur ρ faisant avec les axes des angles ayant pour cosinus a, b, c ; on aura

$$\rho^2 f(a, b, c) = \text{H}$$

ou

(4) $$\rho^2 = \frac{\text{H}}{f(a, b, c)},$$

(5) $$la - mb + nc = 0,$$

(6) $$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Si l'on égale df à zéro pour en avoir le maximum, il viendra

(7) $$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial b}db + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial c}dc = 0;$$

mais (5) et (6) donneront

$$l\,da + m\,db + n\,dc = 0,$$
$$a\,da + b\,db + c\,dc = 0,$$

et, en appliquant à ces formules et à (7) la méthode des multiplicateurs, on obtiendra

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial a} + \lambda l + \mu a = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial b} + \lambda m + \mu b = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial c} + \lambda n + \mu c = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie la première par a, la seconde par b, la troisième par c, et si on les ajoute en observant que f est homogène et du second degré, on aura (p. 221)

$$f(a, b, c) + \lambda(la + mb + nc) + \mu(a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$

ou, en vertu de (4), (5), (6),

$$\frac{H}{\rho^2} + \mu = 0, \quad \mu = -\frac{H}{\rho^2}.$$

Les formules (8) deviennent alors

$$\left(A - \frac{H}{\rho^2}\right) a + B'' b + B' c + \lambda l = 0,$$
$$B'' a + \left(A' - \frac{H}{\rho^2}\right) b + B c + \lambda m = 0,$$
$$B' a + B b + \left(A'' - \frac{H}{\rho^2}\right) c + \lambda n = 0,$$

et, en éliminant a, b, c, λ entre ces formules et (5), on obtient

$$(9)\quad \begin{vmatrix} A - \dfrac{H}{\rho^2} & B'' & B' & l \\ B'' & A' - \dfrac{H}{\rho^2} & B & m \\ B' & B & A'' - \dfrac{H}{\rho^2} & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

L'élimination de λ seul fournirait d'ailleurs des équations donnant a, b, c.

On voit que l'équation (9) est du second degré en $\frac{H}{\rho^2}$; les deux valeurs de ρ que l'on en déduira seront les demi-axes cherchés de la section.

Si l'on veut trouver les sections circulaires, il faudra écrire que l'équation (9) à des racines égales. Nous retrouverons cette question plus loin sous une autre forme, et nous verrons un moyen simple d'exprimer la condition en question.

VIII. — Digression sur une propriété des polynômes du second degré.

Soit

$$\sum a_{ij}x_i x_j + \sum a_i x_i + a$$

un polynôme du second degré non homogène à n variables; il sera maximum ou minimum :

1° Si l'on a

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + a_n = 0, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire, en désignant par Δ le déterminant

$$\sum \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn},$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{\Delta}\left(a_1\frac{\partial\Delta}{\partial a_{11}} + \ldots + a_n\frac{\partial\Delta}{\partial a_{n1}}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = -\frac{1}{\Delta}\left(a_1\frac{\partial\Delta}{\partial a_{n1}} + \ldots + a_n\frac{\partial\Delta}{\partial a_{nn}}\right); \end{array} \right.$$

2° Si la différentielle seconde de ce polynôme reste toujours positive ou négative, c'est-à-dire si $\sum a_{ij}x_i x_j$ est décomposable en une somme de carrés de même signe.

Ainsi un polynôme du second degré n'est pas toujours susceptible d'un maximum ou d'un minimum.

Pour trouver le maximum ou le minimum, on peut aussi décomposer le polynôme en carrés après avoir remplacé $\sum a_i x_i$ par $\sum a_i x_i x$ et a par $a x^2$, et en supposant ensuite $x = 1$. Si alors on s'est arrangé de telle sorte que le premier carré contienne toutes les variables, le second toutes les variables moins une, etc., et que le dernier soit constant, en égalant chaque carré à zéro, excepté le dernier, ce dernier carré sera le maximum ou le minimum cherché, et les équations écrites fourniront successivement toutes les variables; mais cela suppose toujours que tous les carrés soient de même signe.

Il est intéressant de calculer la valeur du maximum ou du minimum M quand il existe. A cet effet, il faut porter les valeurs (2) de x_1, x_2, ... dans le polynôme du second degré dont on cherche le maximum ou le minimum; en d'autres termes, il faut éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre (1) et

$$\mathrm{M} = \sum a_{ij} x_i x_j + \sum a_i x_i + a.$$

Si l'on rend ces équations homogènes, comme il a été dit, en remplaçant $\sum a_i x_i$ par $\sum a_i x_i x$, a par $a x^2$ et M par $\mathrm{M} x^2$, si enfin on pose

$$\sum a_{ij} x_i x_j - \sum a_i x_i x + a x^2 - \mathrm{M} x^2 = f,$$

le calcul se réduira à éliminer $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ entre

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Or $f = 0$ peut s'écrire

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

ou, en vertu des équations précédentes,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

il faut donc éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et x entre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} a - \mathrm{M} & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Si donc on appelle D le discriminant $\sum \pm a a_{11} a_{12} \ldots a_{nn}$, on aura

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{D}}{\Delta}.$$

IX. — Réflexions au sujet des théories précédentes.

Tout ce que nous avons dit au sujet de la recherche des maxima et des minima des fonctions suppose que l'on peut leur appliquer la formule de Taylor (réduite à ses premiers termes) pour des valeurs des variables voisines du maximum ou du minimum. Il ne faudra donc pas s'étonner que quelques maxima ou minima échappent à nos théories, et il y aura toujours lieu d'examiner si les valeurs de $x, y, z, \ldots$, qui rendent $f(x, y, z, \ldots)$, ou l'une de ses dérivées premières discontinue, infinie, ou indéterminée, ne rendraient pas en même temps f maximum ou minimum.

Nous allons montrer, par quelques exemples devenus classiques, l'importance de la remarque précédente.

Problème I. — *Trouver le maximum et le minimum du carré de la distance d'un point à un cercle.*

Prenons pour axes de coordonnées deux diamètres rectangulaires du cercle et le point donné sur l'axe des x; soient l son abscisse et R le rayon du cercle. La distance

d'un point (x, y) du cercle au point donné a pour carré

$$(x - l)^2 + y^2$$

ou bien, en remplaçant y^2 par $R^2 - x^2$,

$$l^2 + R^2 - 2lx.$$

La dérivée de cette quantité étant $-2l$, elle ne saurait s'annuler et l'on en conclut, *avec raison*, que la fonction $l^2 + R^2 - 2lx$ n'a pas de maximum ni de minimum. Mais cette fonction n'est pas *identique* avec celle dont nous cherchons le maximum. En effet, la distance du point donné à un point du cercle *n'existe* qu'autant que x est compris entre $-R$ et $+R$, de sorte que la fonction à rendre maxima est discontinue : quand x varie de $-R$ à $+R$, elle est égale à $R^2 + l^2 - 2lx$; quand x varie en dehors de ces limites, *elle n'existe plus*. Il y a donc lieu de se demander si à $x = -R$ et à $x = +R$ ne correspondrait pas un maximum ou un minimum.

D'ailleurs, à proprement parler, $x = -R$, $x = +R$ ne fournissent pas de *véritables* maxima ou minima, en ce sens que, si l'on fait $R^2 + l^2 - 2lx = \varphi(x)$, on ne peut pas dire $\varphi(R + h) - \varphi(R)$ est *indépendant du signe de* h, puisque h ne peut être *que négatif*. Quoi qu'il en soit, il est commode de considérer $\varphi(x)$ comme étant maximum pour $x = R$ quand $\varphi(R - h) - \varphi(R)$ est négatif, quelles que soient les valeurs que l'on a le *droit* de donner à h, pourvu quelles soient assez petites.

Voici une autre question assez curieuse proposée par M. J. Bertrand et résolue par lui dans le *Journal de Liouville* (1re série, t. VIII, p. 156).

Problème II. — *Étant donnés trois points dans un plan, on demande de trouver dans ce plan un point tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit un minimum.*

A priori, ce problème admet *une* ou *des* solutions. Soient

$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ les coordonnées des points donnés, x, y celles du point cherché; la quantité à rendre minima sera

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}+\ldots \quad \text{ou} \quad \sum\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}.$$

En égalant ses dérivées partielles à zéro, on a

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} = 0, \\ &\sum \frac{y-y_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on appelle α_1, α_2, α_3 les angles que les distances du point cherché aux points donnés font avec l'axe des x, on a, au lieu des formules précédentes,

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = 0,$$
$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 = 0.$$

Éliminons l'angle α_3, nous aurons

$$2 + 2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2) = 1,$$

ou

$$2[1 + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] = 1,$$

ou

$$4\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) = 1,$$

ou enfin

$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) = \tfrac{1}{2}.$$

Cette équation exprime que la moitié de l'angle O que font les distances du point cherché aux points $x_1 y_1$ et $x_2 y_2$ a pour cosinus $\frac{1}{2}$. Cet angle est par suite égal à $\frac{\pi}{3}$; on a donc $O = \frac{2\pi}{3}$.

Il est facile d'en conclure que le point cherché est à l'intersection de trois segments capables de l'angle $\frac{2\pi}{3}$ décrits sur les côtés du triangle fermé par les trois points donnés. Ces segments se couperont en *général* car les équations (1) admettent en *général,* une solution (d'ailleurs, la somme des angles, tels que O, faisant ensemble $3\,\frac{2\pi}{3}$ ou 2π, il existe

en général un point O, tel que, si on le joint aux sommets d'un triangle, les droites ainsi menées font entre elles des angles égaux quand deux segments se coupent).

Toutefois, pour que deux des segments en question se coupent, il faut, comme il est facile de le voir géométriquement, que chaque angle du triangle soit inférieur à $\frac{2\pi}{3}$, de sorte que les méthodes régulières ne font connaître la solution que dans ce cas. Mais, si l'on considère les dérivées (1) et (2) de la quantité à rendre minima, on voit immédiatement qu'elles deviennent indéterminées pour $x = x_1$ et $y = y_1$, ou pour $x = x_2$, $y = y_2$, ou enfin pour $x = x_3$, $y = y_3$. Je dis qu'elles sont réellement indéterminées; en effet, on a

$$\frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2}} = \left[1 - \left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et, pour $x = x_1$, $y = y_1$, cette expression est indéterminée, car le rapport $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ est arbitraire, x et y étant tout à fait indépendants l'un de l'autre.

Il y a alors lieu de se demander si les points donnés ne répondraient pas au minimum cherché, et, comme le problème a évidemment une solution, c'est le sommet correspondant à l'angle obtus du triangle des trois points qui répond à la question. M. J. Bertrand donne d'ailleurs une preuve élémentaire directe de cette assertion. Nous laissons au lecteur le soin de la chercher.

EXERCICES ET NOTES.

1. Le plus petit polygone d'un nombre de côtés donnés, circonscrit à un cercle, est régulier.

2. Le plus grand polygone d'un nombre de côtés donnés, inscrit dans un cercle, est régulier.

3. De tous les polygones d'un même nombre de côtés et de même périmètre, le plus grand est régulier.

4. Le maximum de $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, si $x+y+z$ est constant, a lieu quand

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},$$

lors même que α, β, γ ne sont pas entiers.

5. Trouver un point tel que la somme des carrés de ses distances à des plans fixes, ou à des droites fixes, soit minimum. Le point cherché est le centre de gravité des pieds des perpendiculaires abaissées de ce point (cherché) sur les plans ou les droites.

6. Trouver un point tel que le produit de ses distances aux faces d'un tétraèdre soit un minimum (c'est le centre de gravité du tétraèdre).

7. Trouver un point tel que le produit de ses distances aux arêtes d'un tétraèdre soit un minimum (employer des coordonnées tétraédriques).

8. Le triangle d'aire maxima, ayant ses sommets sur les côtés d'un triangle donné, a en apparence pour sommets les milieux des côtés de ce triangle.

9. Le tétraèdre de volume maximum, ayant ses sommets sur les faces d'un tétraèdre donné, a en apparence pour sommets les centres de gravité des faces du second tétraèdre. Mais ce ne sont pas là de véritables maxima.

10. Le triangle de périmètre minimum, ayant ses sommets sur les côtés d'un triangle donné, a ses sommets aux pieds des hauteurs de ce triangle.

11. Inscrire un triangle maximum dans l'ellipse (il y a une infinité de solutions), ou un tétraèdre maximum dans l'ellipsoïde.

12. Circonscrire un triangle minimum à l'ellipse.

13. Circonscrire une ellipse minima à un triangle.

14. Par un point donné on propose de faire passer un plan qui détache dans un trièdre trirectangle un tétraèdre de volume minimum.

15. Par un point intérieur à un paraboloïde elliptique, on demande de faire passer un plan qui détache un segment de volume minimum.

16. Par une droite donnée on demande de faire passer un plan qui coupe un ellipsoïde suivant une section d'aire maxima.

17. Étant donné un segment de paraboloïde elliptique terminé par un plan perpendiculaire à l'axe, on demande d'inscrire dans ce segment un parallélépipède de volume maximum. Ce parallélépipède est supposé rectangle et droit, ses côtés sont parallèles aux axes de l'ellipse qui sert de base au segment et à l'axe du paraboloïde.

18. De tous les tétraèdres ayant des bases superposables et même hauteur, quel est celui dont la surface totale est la plus petite?

19. Plusieurs fonctions symétriques de $x, y, z, \ldots$ restant constantes, une autre fonction symétrique de $x, y, z, \ldots$ est maxima ou minima quand les variables $x, y, z, \ldots$ sont égales entre elles.

(Cauchy.)

CHAPITRE XIII.

SUR LES VALEURS DES FONCTIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS UNE FORME SINGULIÈRE.

I. — Préliminaires.

Si une fonction $f(x)$ est mal déterminée pour $x=a$, je conviendrai d'appeler $f(a)$ la limite vers laquelle tend $f(x)$ quand x tend vers a. Pour effectuer cette détermination, on a souvent fait usage d'une formule que nous allons établir et qui peut être utile dans bien des circonstances.

Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions d'une variable, auxquelles nous supposons que l'on puisse appliquer le théorème de Taylor. Posons

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = P; \tag{1}$$

nous en concluons

$$f(a+h) - P\,F(a+h) = 0$$

ou, par la formule de Taylor,

$$f(a) - P\,F(a) + h[f'(a) - P\,F'(a)] + \ldots \\ + \frac{h^n}{1.2\ldots n}[f^n(a+\theta h) - P\,F^n(a+\theta h)] = 0;$$

tirant P de cette équation et ayant égard à (1), on a

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(a+\theta h)}{F(a) + h\,F'(a) + \frac{h^2}{1.2}\,F''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\,F^n(a+\theta h)}.$$

Le développement direct du numérateur et du dénominateur n'aurait pas permis de supposer à θ des valeurs égales dans ces deux termes.

II. — Valeur d'une fonction d'une variable qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Quand une fonction est de la forme $\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$, son numérateur et son dénominateur peuvent s'annuler à la fois pour $x = a$; sa valeur pour $x = a$ est la limite vers laquelle elle converge quand x tend vers la valeur a pour laquelle on a à la fois $f(a) = 0$, $\mathrm{F}(a) = 0$. Le moyen le plus sûr de trouver cette limite est de remplacer $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ par des développements en série, développements qui mettent en évidence certains facteurs convergeant vers zéro pour $x = a$, que l'on peut supprimer au numérateur et au dénominateur. On a, par exemple,

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{\left(x - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right)^2}{\dfrac{x^2}{1.2} - \dfrac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots} = \frac{\left(1 - \dfrac{x^2}{1.2.3} + \ldots\right)^2}{\dfrac{1}{1.2} - \dfrac{x^2}{1.2.3.4} + \ldots};$$

donc, pour $x = 0$,

$$\lim \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 2.$$

On a voulu régulariser ce procédé; malheureusement la règle, dite *de L'Hospital*, que nous allons faire connaître, ne saurait être appliquée sans précaution aux expressions de la forme $\frac{0}{0}$, et la précaution à prendre consiste précisément à vérifier si certains développements sont possibles.

La formule démontrée au paragraphe précédent peut se réduire à

$$\frac{f(a+h)}{\mathrm{F}(a+h)} = \frac{f(a) + h f'(a+\theta h)}{\mathrm{F}(a) + h \mathrm{F}'(a+\theta h)}.$$

Supposons que l'on ait $f(a)=0$, $F(a)=0$; il viendra

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{F'(a+\theta h)}.$$

Si l'on fait tendre h vers zéro, le premier membre a la même limite que $\frac{f(x)}{F(x)}$ pour $x=a$, le second a la même limite que $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ pour $x=a$; donc

$$\lim\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\frac{f'(x)}{F'(x)};$$

par suite, si $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ est une quantité connue, bien déterminée, on aura la limite de $\frac{f(x)}{F(x)}$ en prenant le rapport des dérivées de ses termes pour $x=a$; si $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ se présentait lui-même sous la forme $\frac{0}{0}$, on lui appliquerait la règle que nous venons de trouver, et ainsi de suite. Telle est la règle de L'Hospital.

Comme on le voit, l'application de cette règle suppose $f(x)$ et $F(x)$ développables par la formule de Taylor. Il faudra donc, avant de l'appliquer, examiner si les développements de $f(x)$ et de $F(x)$ en série sont possibles: alors à quoi bon la règle? En second lieu, il arrive souvent que $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $F'(x)$, $F''(x)$, ... sont tous nuls et la règle tombe encore en défaut. Dans ce cas, en ayant recours à d'autres développements que ceux qui sont fournis par la formule de Taylor, on a souvent la solution rapide de la question. Ainsi, par exemple,

$$\frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$$

est évidemment égal à $\sqrt{2a}$ pour $x=a$, ainsi qu'on peut le voir en mettant x^2-a^2 sous la forme $(x+a)(x-a)$; l'application de la règle de L'Hospital donne

$$\lim\frac{x(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}=\lim\frac{2(x-a)^{\frac{1}{2}}}{x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}};$$

mais le second membre est encore $\frac{0}{0}$ pour $x = a$, et l'on comprend qu'il en sera toujours de même indéfiniment.

Considérons encore l'expression

$$\frac{x - x^2 \cos\frac{1}{x}}{\sin x};$$

On voit facilement que, pour $x = 0$, cette expression a pour limite l'unité, car elle se décompose en

$$\frac{x}{\sin x} - \frac{x}{\sin x}\, x \cos\frac{1}{x};$$

or $\frac{x}{\sin x}$ ayant pour limite 1, et $\cos\frac{1}{x}$ étant toujours compris entre -1 et $+1$, la limite de notre expression est bien 1. La règle de L'Hospital conduit à chercher la limite de

$$\frac{1 - 2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}}{\cos x} \quad \text{ou de} \quad 1 - \sin\frac{1}{x},$$

qui est tout à fait arbitraire entre les limites 0 et 2.

Il est assez curieux de voir que, dans certains Cours, on applique la règle de L'Hospital en faisant ces remarques, et qu'on cherche à donner une nouvelle démonstration de la règle pour le cas où $a = \infty$. Voici cette démonstration :

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} \,(\text{pour } x = \infty) = \lim \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{F\left(\frac{1}{x}\right)} \text{ pour } x = 0;$$

ainsi

$$\text{pour } x = \infty \quad \lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{F'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \quad \text{pour } x = 0$$

ou

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)} \quad \text{pour } x = \infty.$$

Appliquons, comme on le fait dans quelques livres classiques, la règle de L'Hospital à la recherche de la limite

de $\frac{e^{-x}}{x^{-m}}$ pour $x=\infty$, m désignant un entier >0; nous avons

$$\lim \frac{e^{-x}}{x^{-m}} = \lim \frac{e^{-x}}{(m+1)x^{-(m+1)}};$$

en changeant m en $m-1$, $m-2$, ..., nous trouverons, pour m entier,

$$\lim \frac{e^{-x}}{x^{-m}} = \lim e^{-x}\, 1.2.3\ldots m = 0.$$

Ce résultat est exact, mais le raisonnement qui y conduit ne l'est pas; en effet, reconstituons, pour notre exemple particulier, la démonstration de la règle : nous serons conduits à chercher la limite de $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^m}$ pour $x=0$; mais nous ne sommes pas en droit d'appliquer à cet exemple la formule démontrée au paragraphe précédent, cette formule supposant elle-même que l'on peut appliquer à $e^{-\frac{1}{x}}$ le théorème de Taylor. On a au contraire très simplement

$$\frac{e^{-x}}{x^{-m}} = \frac{x^m}{e^x} = \frac{x^m}{1+x+\frac{x^2}{1.2}+\ldots} = \frac{1}{x^{-m}+x^{-m+1}+\ldots};$$

$\frac{e^{-x}}{x^{-m}}$ est donc l'inverse de

$$x^{-m}+x^{-m+1}+\ldots+\frac{x^{\alpha-m}}{1.2.3\ldots\alpha}+\ldots$$

qui croît indéfiniment avec x; donc la limite de $\frac{e^{-x}}{x^{-m}}$ est zéro, et ce fait est prouvé pour les valeurs fractionnaires ou incommensurables de m.

III. — Vraie valeur des fonctions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Si, pour $x=a$, $f(x)$ et $F(x)$ sont infinis, la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$; il est facile de ramener ce cas d'indéter-

mination à celui que nous venons d'examiner, en écrivant la fonction $\frac{f(x)}{F(x)}$ sous la forme suivante

$$\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

et en lui appliquant la règle de L'Hospital, qui donne

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{-\frac{1}{F^2(x)} F'(x)}{-\frac{1}{f^2(x)} f'(x)};$$

d'où l'on conclut, en supposant $\lim \frac{f(x)}{F(x)}$ finie et différente de o,

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} = \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Lorsque $\frac{f(x)}{F(x)}$ est nul, on tourne encore la difficulté en cherchant la limite de $\frac{f(x)+kF(x)}{F(x)}$ qui est k; on applique la règle à cette fraction et l'on trouve

$$\frac{f'(x)+kF'(x)}{F'(x)};$$

donc $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ est bien égal à o comme $\frac{f(x)}{F(x)}$.

Nous ne ferons pas d'applications de cette règle, mais nous résoudrons quelques questions dont l'importance sera mise en évidence un peu plus loin.

Théorème I. — *La limite de* $\frac{a^x}{x^m}$ *pour* $x = \infty$, *quand* $a > 1$, *est toujours infinie.*

En effet, on a

$$a^x = e^{x \log a} = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{(x \log a)^2}{1.2} + \ldots;$$

a étant supérieur à 1, $\log a$ est positif; donc, dans le dévelop-

pement de a^x, les termes croissent indéfiniment et il s'en trouve de supérieurs à x^{m+1}. Si l'on divise ces termes par x^m, on obtient encore un résultat indéfiniment croissant avec x ; donc la limite de $\frac{a^x}{x^m}$ pour $x = \infty$ est infinie.

Corollaire. — La limite de $\frac{z}{(\log z)^m}$, pour $z = \infty$, est infinie, ce dont on se convainc aisément en remplaçant z par e^x.

Théorème II. — *La limite de* $\frac{\log x}{x^{-m}}$, *m étant positif, est nulle pour* $x = 0$.

En effet, posant $x = e^u$, on a à chercher la limite de

$$\frac{u}{e^{-mu}} \quad \text{pour } u = -\infty$$

ou de

$$-\frac{u}{e^{mu}} \quad \text{pour } u = \infty;$$

cette limite est zéro, car celle de $\frac{e^{mu}}{u}$ est infinie, comme on l'a vu.

IV. — De quelques autres cas d'indétermination apparente.

Les expressions qui se présentent sous la forme $0 \times \infty$, telles que le produit $f(x)\,F(x)$ dont les facteurs sont l'un nul et l'autre infini pour $x = a$, se ramènent aux cas précédents en les écrivant ainsi

$$\frac{F(x)}{[f(x)]^{-1}}.$$

Exemple. — $\operatorname{Lim} x^m \log x$ pour $x = 0$ est égal à la limite de $\frac{\log x}{x^{-m}}$, c'est-à-dire à zéro si $m > 0$.

Les expressions de la forme $\infty - \infty$, telles que $f(x) - F(x)$,

dans lesquelles on a $f(a) = \infty$, $F(a) = \infty$, se ramènent aux formes $\frac{0}{0}$ comme il suit :

$$f(x) - F(x) = f(x)\left[1 - \frac{F(x)}{f(x)}\right].$$

Si, après avoir calculé la limite de $\frac{F(x)}{f(x)}$, on trouve une limite différente de l'unité, on en conclut que $f(x) - F(x)$ est infini ; sinon on est ramené à une expression de la forme $0 \times \infty$.

Les expressions qui se présentent sous la forme 1^∞, 0^0 et qui proviennent d'une expression telle que $[F(x)]^{f(x)}$ se ramènent à des expressions plus simples en prenant leurs logarithmes.

V. — Théorème de Cauchy.

Nous ne pouvons passer sous silence un théorème remarquable de Cauchy, à cause de son importance dans la théorie des suites.

Théorème. — *Si, pour des valeurs croissantes de x,*

$$f(x+1) - f(x)$$

converge vers une certaine limite, $\frac{f(x)}{x}$ convergera vers la même limite, et l'on est sûr qu'il converge vers une limite unique.

En effet, soit l la limite de $f(x+1) - f(x)$; quand x sera assez grand, on pourra écrire

$$f(x+1) - f(x) = l + \varepsilon.$$

Lorsque x croîtra, ε ne dépassera pas une quantité donnée α, si petite que l'on voudra ; on peut donc écrire

$$f(x+1) - f(x) = l \pm \varepsilon,$$
$$f(x+2) - f(x+1) = l \pm \varepsilon',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$f(x+n) - f(x+n-1) = l \pm \varepsilon^{(n-1)},$$

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ étant moindres que α; si l'on ajoute ces équations, on trouve

$$f(x+n)-f(x)=nl+\sum\varepsilon$$

et

$$\frac{f(x+n)-f(x)}{n}=l+\frac{\sum\varepsilon}{n}.$$

$\dfrac{\sum\varepsilon}{n}$ est moindre en valeur absolue que α; désignons-le par ω: nous aurons

$$f(x+n)-f(x)=(l+\omega)n$$

ou

$$\frac{f(x+n)}{x+n}-\frac{f(x)}{x+n}=\frac{l+\omega}{x+n}n.$$

On peut toujours prendre n assez grand pour que $\dfrac{f(x)}{x+n}$ soit moindre qu'une quantité donnée et, par suite, sa limite pour $n=\infty$ est zéro; quant à la limite de $\dfrac{n}{x+n}$, elle est l'unité; donc, en passant aux limites, on a

$$\lim\frac{f(x+n)}{x+n}=l \quad \text{pour } n=\infty,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lim\frac{f(x)}{x}=\lim f(x+1)-f(x) \quad \text{pour } x=\infty.$$

Corollaire I. — Remplaçons $f(x)$ par $\log\varphi(x)$; nous aurons

$$\lim\log[\varphi(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\log\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$$

ou bien

$$\lim\varphi(x)^{\frac{1}{x}}=\lim\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}.$$

Corollaire II. — Considérons la série

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots+\varphi(x)+\ldots;$$

on sait qu'elle est convergente quand

$$\lim \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} < 1.$$

On en conclut qu'elle est également convergente lorsque

$$\lim \varphi(x)^{\frac{1}{x}} < 1;$$

ce qui peut d'ailleurs se démontrer directement.

Corollaire III. — Si, pour des valeurs croissantes de x, $f(x+1) - f(x)$ est infini, $\frac{f(x)}{x}$ le sera aussi. En raisonnant comme précédemment, on prouvera que $\frac{f(x+n) - f(x)}{n}$ peut être pris plus grand que toute quantité donnée et que $\frac{f(x+n)}{x+n}$ dépasse toute limite.

EXERCICES ET NOTES.

1. On a

$$\lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2},$$

$$\lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11}{24} e,$$

pour $x = \infty$.

2. On a

$$\lim \left(\cos \frac{x}{\sqrt{m}}\right)^m = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

pour $m = \infty$.

3. On a

$$\lim \cos^m \frac{x}{m} = 1$$

pour $m = \infty$.

4. L'expression $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}$ a-t-elle une limite quand le nombre des radicaux augmente indéfiniment? Si cette limite existe, on demande de la calculer.

5. Construire les courbes ayant pour équations

$$y = x^x,$$
$$y = x \log x,$$
$$y = \frac{\log x}{x},$$
$$y = x^{-x} + x,$$
$$y^x = x^y.$$

6. Trouver, quand elle existe, la limite de $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot}}}}$.

7. Considérons une série de la forme

$$\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n)} + \ldots;$$

si l'on a, pour $m = \infty$,

$$\lim m \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} > 1,$$

la série est convergente; si au contraire cette limite est plus petite que 1, la série est divergente. Si cette limite est 1, on considérera l'expression

$$\left[m \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1 \right] \log m,$$

et, suivant que sa limite sera > 1 ou < 1, la série sera convergente ou divergente; si la limite est 1, on considérera l'expression

$$\left\{ \left[m \frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} - 1 \right] \log m - 1 \right\} \log \log m, \;\ldots.$$

(Augustus de Morgan.)

8. La série, dont le terme général est $\frac{1}{\varphi(n)}$, est convergente si, pour $n = \infty$, $\frac{d^2\varphi}{dn^2}$ a une limite différente de zéro et si $\varphi(n) = 0$ n'a pas de racines entières. (Grolous.)

9. La série dont le terme général est $\frac{1}{\varphi(n)}$ est convergente si $\Delta^2 \varphi(n)$ est constante ou croissante ($\Delta n = 1$). (Émile Lemoine.)

NOTES.

NOTE I.

Pendant longtemps on a admis sans démonstration que *toute fonction continue a une dérivée;* et, par le fait, bien que cette proposition ne soit pas évidente, elle doit être considérée comme le *postulatum* fondamental de la Mécanique, de la Physique mathématique et de toute application des Sciences mathématiques ([1]).

Ampère et Duhamel ont essayé de prouver que les fonctions continues ont des dérivées, mais leurs démonstrations prouvent seulement que ces dérivées ne peuvent être toujours nulles ou toujours infinies, rien de plus. Longtemps on a cru établir, dans les Cours, l'existence de la dérivée, en montrant que l'ordonnée d'une courbe continue avait pour dérivée, par rapport à l'abscisse, le coefficient angulaire de la tangente; mais il est clair qu'un fait purement analytique doit pouvoir s'établir indépendamment de toute considération géométrique, et, aujourd'hui, on est encore sans preuve irréfutable de l'existence de la dérivée des fonctions continues.

Il y a plus, Hanckel, en 1870, a essayé de former de toutes pièces des fonctions continues n'admettant pas de dérivées; la fonction représentée par la série suivante serait dans ce cas :

$$\sin x + \frac{\sin 2!x}{1} + \frac{\sin 3!x}{2!} + \ldots + \frac{\sin n!x}{(n-1)!} + \ldots.$$

Ces théories ont été réfutées par M. Gilbert (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Belgique,* 2e série, t. XXXV);

([1]) On se figure difficilement ce que serait une courbe sans tangentes, un mouvement sans vitesse, un cours d'eau sans débit, etc.

mais M. Darboux (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. IV et VIII) a repris la question et a cru devoir donner raison à M. Hanckel. La question, à notre avis, est encore dans le domaine de la métaphysique; quoi qu'il en soit, nous avons eu soin, dans ce Traité, de toujours démontrer l'existence des dérivées que nous cherchions; nous ne nous sommes abstenu d'observer cette règle que dans des cas fort simples, quand il s'est agi par exemple des fonctions inverses, en faisant remarquer que, quand $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ en a une aussi. Toutefois, pour ne laisser aucun nuage dans l'esprit du lecteur, nous allons montrer dans cette Note comment on peut trouver directement la dérivée d'un quotient de deux fonctions u et v de x et la dérivée de arc sin x.

Dérivée de $\frac{u}{v}$. — On a

$$\Delta\frac{u}{v} : \Delta x = \left(\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}\right) : \Delta x$$

$$= \left(v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) : v(v+\Delta v);$$

et, en passant aux limites,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Dérivée de arc sin x. — On a, en supposant $\Delta x = h$,

$$\frac{\Delta \arcsin x}{\Delta x} = \frac{\arcsin(x+h) - \arcsin x}{h}$$

$$= \frac{\arcsin\left[(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}\right]}{h},$$

et, en passant aux limites et observant que le rapport d'un arc à son sinus a pour limite 1,

$$(\arcsin x)' = \lim \frac{(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}}{h}$$

$$= \lim \frac{(x+h)^2(1-x^2) - x^2[1-(x+h)^2]}{\left[(x+h)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+h)^2}\right]h},$$

c'est-à-dire, réductions faites,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On trouverait d'une façon analogue la dérivée de arc tang x.

NOTE II.

Le théorème de M. *O. Bonnet*, que l'on appelle souvent *théorème de Rolle* et que nous avons démontré (p. 73), repose sur un principe que nous avons admis, parce qu'il ne nous était pas venu à l'esprit qu'on pût le contester; l'objet de cette Note est de démontrer ce principe, qui peut s'énoncer comme il suit :

Si une fonction $f(x)$, continue quand x varie entre a et $b > a$ (y compris ces limites, bien entendu), s'annule pour $x = a$ et $x = b$, sans rester constamment nulle, elle passe dans l'intervalle a, b par un maximum ou par un minimum, c'est-à-dire par une valeur $f(c)$, c désignant un nombre compris entre a et b, telle que, h étant moindre qu'une quantité suffisamment petite, les quantités

$$f(c+h)-f(c) \quad \text{et} \quad f(c-h)-f(c)$$

soient toujours de même signe.

Supposons, pour fixer les idées, que, x croissant à partir de a, $f(x)$ prenne des valeurs positives; il est incontestable que $f(x)$ étant continu ne croîtra pas au delà de toute limite, et qu'il existera une valeur m positive, que $f(x)$ ne pourra pas dépasser, telle toutefois que $f(x)$ pourra dépasser toute valeur $m - \varepsilon$ moindre; la question est de savoir s'il existe une valeur c de x, telle que l'on ait

$$f(c) = m.$$

Or, si $f(x)$ peut s'approcher autant qu'on le veut de m, c'est que $f(x)$ tend vers la limite m, quand x tend vers une cer-

taine valeur c, et je dis que l'on a précisément $f(c) = m$. En effet, $f(x)$ doit avoir une valeur bien déterminée pour $x = c$, sans quoi il serait discontinu pour $x = c$; ensuite, cette valeur ne peut être que m; car, si elle différait de m, $f(x)$ n'aurait pas pour limite m pour $x = c$, et ne serait pas continu pour cette valeur de x.

La formule de Taylor, comme nous l'avons vu, peut être appliquée lors même que l'on ne serait pas certain que la dernière dérivée employée pour former le reste est continue. Cela résulte du théorème de M. Bonnet; toutefois la formule de Taylor appliquée au développement de $f(x+h, y+k, \ldots)$, lorsque les dérivées employées pour former le reste ne sont pas continues, doit affecter la forme suivante, où $0 < \theta < 1$,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\left[\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} f(x+ht, y+kt, \ldots)\right]_{t=\theta},$$

qui peut n'être pas tout à fait celle qui est explicitement donnée page 142, parce que la formule qui donne la dérivée d'une fonction composée suppose les dérivées partielles de cette fonction continues. Mais le reste est toujours d'ordre $n+1$ (p. 81 et 82), et c'est là l'essentiel.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES[1].

CHAPITRE Ier.

Introduction.

CHAPITRE II.

Théorie générale des séries.

[1] Les matières traitées dans les paragraphes et chapitres marqués d'un * ne sont pas exigés des candidats à la licence.

CHAPITRE III.

Théorie des dérivées.

CHAPITRE IV.

Différences des fonctions d'une variable.

CHAPITRE V.

Théorie des différentielles des fonctions d'une seule variable.

CHAPITRE VI.

Dérivées, différences et différentielles des fonctions de plusieurs variables.

CHAPITRE VII.

Des déterminants fonctionnels et des fonctions implicites.

CHAPITRE VIII.

Fonctions de variables imaginaires.

CHAPITRE IX.

Changement de variables.

CHAPITRE X.

*Théorie des substitutions linéaires.

CHAPITRE XI.

*Sur l'élimination.

CHAPITRE XII.

Résolution des questions de maximum et de minimum.

CHAPITRE XIII.

Sur les valeurs des fonctions qui se présentent sous une forme singulière.

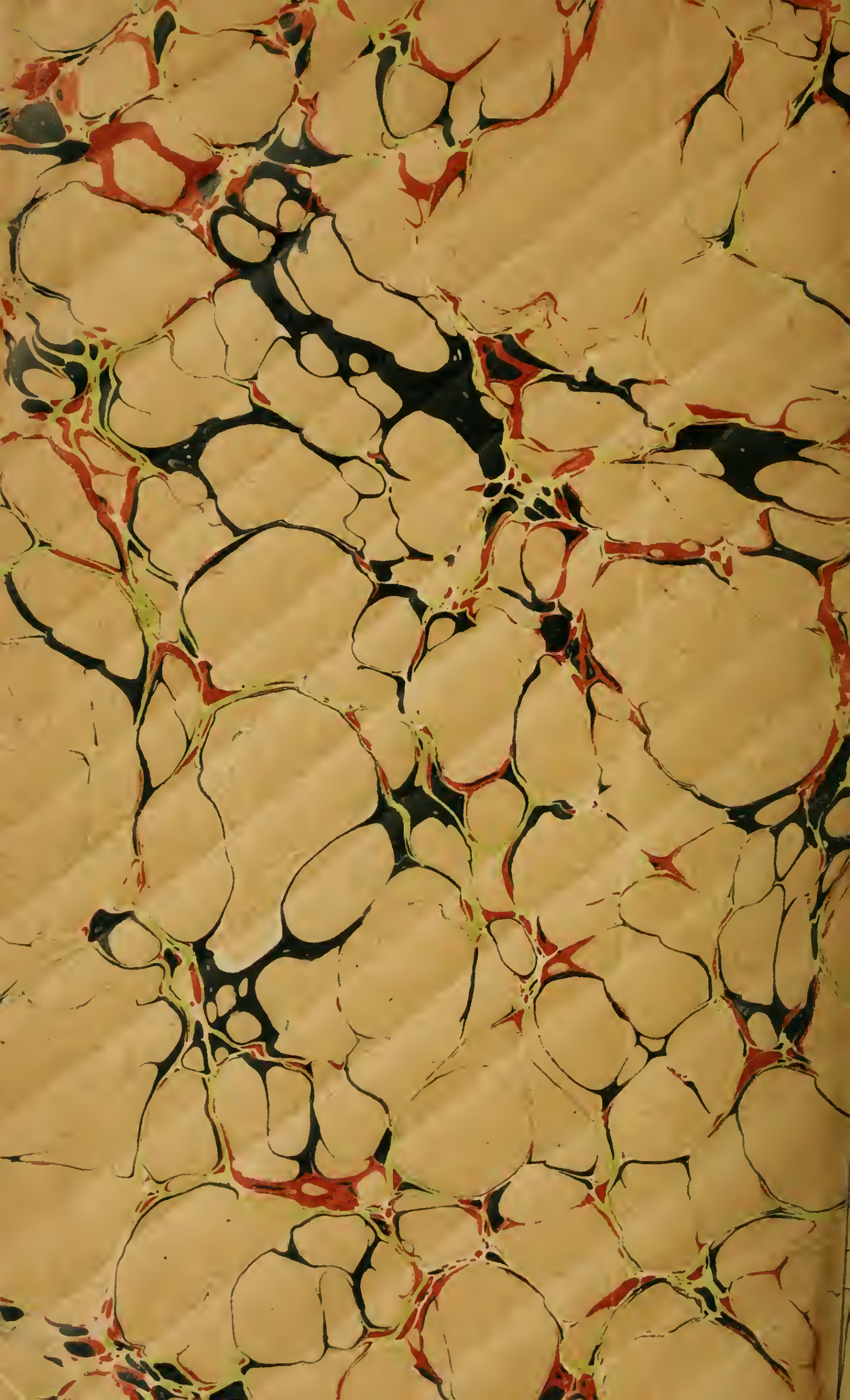
FIN DE LA TABLE DU TOME PREMIER.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Mettez*
22	13	$< a u_n^3$	$a^2 u_n$
30	12	α dans les 2e facteurs	β
39	13 et 16	$\frac{a}{x^{m-2}}, \quad \frac{a^2}{x^{m-1}}$	$\frac{a}{x^{m}}, \quad \frac{a^2}{x^{m+1}}$
	14 et 17	$\frac{a^n}{x^{m-n-1}}$	$\frac{a^n}{x^{m+n-1}}$
43	10 et 11	x_i	x^i
46	12	θ^{m-1}	θ_m
56	2 par le bas	$= \log(x+y)$	$= \log xy$
76	3 par le bas	$f^{n-1}(x)\,Ph^i$	$f^{n-1}(x) - Ph^i$
85	5	$B_1 u^n, \; B_2 u^{n-1}$	$B_1 u^{n-1}, \; B_2 u^{n-2}$
94	2	$\cos(x+\theta h)\cos(x-\theta')$	$\sin(x-\theta h)\sin(x+\theta')$
94	4	$\cos^2(x+10'')$	$\sin^2(x+10'')$
94	5	arcs moindres que 88°	arcs supérieurs à 2°
90	5 par le bas	$y = \text{tang}\, x$	$y = \text{arc tang}\, x$
90	10	$= \frac{x' + \theta x'}{1 + \theta x'}$	$= \frac{x' - \theta x'}{1 - \theta x'}$
102	10	$h^{n-1} f^{n+1}(x+\theta h)$	$f^{n+1}(x+\theta h)$
105	6 et 4 par le bas	$f^n(z)$	$f^{n-1}(z)$
112	12 par le bas	$\Delta^4 0^4 = 60$	$\Delta^3 1^4 = 60$
112	10 par le bas	$65 = \Delta 3^4$	$65 = \Delta 2^4$
112	8 par le bas	$\Delta 0^4 = \Delta^4 1^1$	$\Delta^4 0^4 = \Delta^4 1^4$
147	7	$\sum_{i+1} \sum_{j+1}$	$\sum_{i=1} \sum_{j=1}$
150	6 par le bas	$= d^n f$	$= df$
155	10	$\frac{d^2 f}{dy^2}\, dy$	$\frac{d^2 f}{dy^2}\, dy^2$
183	23	$abc\varepsilon \sin\theta$	$abc\varepsilon^2 \sin\theta$
191	4	$F(x-z)$	$F^n(x-z)$

Pages.	Lignes.	*Au lieu de*	*Mettez*
195	10	$y'_t : y'_x$	$y'_t : x'_t$
196	12	$-\partial^2 y\, \partial^2 x\, \partial x$	$-\partial y\, \partial^3 x\, \partial x$
213	10 par le bas	a_{12}	a_{22}
215	10 par le bas	a_{n1}, a_{n2}	a_{1n}, a_{2n}
220	4	$\frac{x_2^2}{(a_1^2+\lambda_1)^2}$	$\frac{x_1^2}{(a_1^2+\lambda_1)^2}$
227	9 par le bas	$\gamma_{n2} x_n$	$\gamma_{1n} x_n$
229	12 par le bas	$c_{2i}\, a_{ji}$	$c_{i1}\, a_{ji}$
266	6	$- D a_{ji}$	$= D a_{ji}$
280	8	$\lambda x' + \mu'$	$\lambda x' + \mu$
280	10	$\lambda x'_1 + \mu'$	$\lambda x'_1 + \mu$
282	7	$\frac{n(n-1)}{1.2}$	$\frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2}$
294	6 par le bas	$\frac{\varphi(x)}{x-\alpha}$	$\frac{\varphi(x)}{x-\alpha_1}$

8548 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.




PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
P&A Sci.

